Física Experimental

Apostila

Curso: Licenciatura em Física

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Sumário

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Apresentação

O laboratório fornece ao estudante uma oportunidade única de validar as teorias físicas de uma maneira quantitativa num experimento real. A experiência no laboratório ensina ao estudante as limitações inerentes à aplicação das teorias físicas a situações físicas reais e introduz várias maneiras de minimizar esta incerteza experimental. O propósito dos laboratórios de Física é tanto o de demonstrar algum princípio físico geral, quanto permitir ao estudante aprender e apreciar a realização de uma medida experimental cuidadosa.

Esta apostila desenvolvida pelo grupo de professores de Física do CEUNES contempla um estudo introdutório à teoria de erros com vista ao tratamento de dados obtidos no Laboratório e a construção de gráficos lineares, além da descrição detalhada de 09 experimentos nas áreas de mecânica, fluidos e calor.

A Coordenação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

DESENVOLVIMENTO DO CURSO, PROVAS PARCIAIS E TESTES

As três primeiras aulas estão reservadas para um estudo introdutório à teoria dos erros, com vistas ao tratamento dos dados obtidos no Laboratório, sendo que a segunda aula será reservada, especificamente, para o estudo de gráficos em papel milimetrado e/ou monolog.

No restante das aulas serão realizadas oito experiências, divididas em duas séries de quatro, havendo a possibilidade de uma experiência extra.

Os alunos serão distribuídos em quatro grupos, sendo que cada grupo desenvolverá uma experiência em cada aula.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO

CRITÉRIO GERAL:

As avaliações no decorrer do semestre serão feitas através de duas provas, dois testes e relatórios com os seguintes pesos:

$$M_{parcial} = \frac{3M_{provas} + M_{testes} + M_{relatorios}}{5}$$

M_{provas} = Média aritmética das notas obtidas nas 2 provas parciais

M_{testes} = Média aritmética das notas obtidas nos 2 testes

$M_{relatórios}$ = Média aritmética das notas obtidas nos relatórios.

1. Provas:

A primeira prova será aplicada após as quatro primeiras experiências, portanto com o conteúdo abordado nestas experiências.

A segunda prova será aplicada após se completarem as quatro experiências finais, sendo abordado o conteúdo referente a estas experiências.

As provas consistirão de problemas ou questões que poderão abordar qualquer aspecto das experiências, como procedimentos, conceitos físicos envolvidos diretamente com as mesmas, dedução de fórmulas específicas para os cálculos das grandezas, cálculos numéricos, etc.

2. Testes:

O primeiro teste consistirá de questões referentes ao conteúdo de teoria de erros.

O segundo teste consistirá na elaboração de um gráfico (em papel milimetrado e/ou monolog) incluindo todos os procedimentos e cálculos pertinentes.

3. Relatórios:

Após cada aula com experiência, o grupo deverá elaborar um relatório seguindo os roteiros disponibilizados pelos professores contendo: os cálculos, os gráficos (quando houver), discussão das questões propostas, dedução de fórmulas se forem solicitadas na apostila e conclusão que deverá incluir comentários referentes aos resultados obtidos, aos procedimentos adotados e sua relação com a teoria envolvida.

Observações:

- ✓ Cada grupo deverá apresentar apenas um relatório elaborado por todos os seus membros.
- ✓ Os grupos deverão apresentar o relatório, na aula seguinte àquela da realização da experiência, sem prorrogação.
- ✓ Pontualidade: será dada uma tolerância de, no máximo, 15 minutos. Um atraso maior será considerado na nota do relatório correspondente.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Informações gerais sobre o curso:

- **NÃO** será permitido, **em hipótese nenhuma**, o uso de **calculadoras programáveis** (tipo HP ou similares), em **provas** e **testes**. Entretanto, recomenda-se a utilização de uma calculadora científica comum.

- Em caso de reutilização de apostilas de anos anteriores, **NÃO** deverão constar, **em hipótese nenhuma**, os dados tomados naquela ocasião: estes deverão estar **todos apagados**.

- O aluno poderá repor, em caso de falta, **apenas UMA** experiência da primeira série e **UMA** experiência da segunda série, nos **dias e horários** de **'Reposição de Experiências'** indicados no calendário.

- A 'Reposição de Experiências' é feita somente com a presença do monitor e o relatório relativo à experiência reposta só poderá atingir o **valor máximo de 7,0**.

- É importante repetir: os relatórios das experiências (**1 relatório por grupo**) deverão ser apresentados na aula seguinte daquela da realização da experiência, **sem prorrogação**.

- Em caso de falta do aluno às aulas dos dias dos testes, **NÃO** caberá reposição dos mesmos. Em caso de falta do aluno a uma das provas e **somente mediante a apresentação de atestado médico** na aula seguinte ao dia da prova, esta poderá ser reposta.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

1 Cronograma

Semana 1: Apresentação do curso;

Semana 2: Teoria da Medida e dos Erros;

Semana 3: Gráficos lineares;

Semana 4: Experimentos;

Semana 5: Experimentos;

Semana 6: Experimentos;

Semana 7: Experimentos;

Semana 8: Semana de Reposição de Experimentos;

Semana 9: Semana de dúvidas;

Semana 10: Primeira prova;

Semana 11: Experimentos;

Semana 12: Experimentos;

Semana 13: Experimentos;

Semana 14: Experimentos;

Semana 15: Semana de Reposição de Experimentos;

Semana 16: Semana de dúvidas;

Semana 17: Segunda prova;

Semana 18: Prova final.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

2 Relatórios

De uma forma geral, em ciência os resultados de um dado estudo são registrados e divulgados na forma de relatórios científicos. Entende-se por relatório científico um documento que segue um padrão previamente definido e redigido de forma que o leitor, a partir das indicações do texto, possa realizar as seguintes tarefas:

1) Reproduzir as experiências e obter os resultados descritos no trabalho, com igual ou menor número de erros;

2) Repetir as observações e formar opinião sobre as conclusões do autor;

3) Verificar a exatidão das análises, induções e deduções, nas quais estiverem baseadas as conclusões do autor, usando como fonte as informações dadas no relatório.

2.1 Partes de um relatório

1. Capa: Deve incluir os dados do local onde a experiência foi realizada (Universidade, Instituto e Departamento), disciplina, professor, equipe envolvida, data e título da experiência.

2. **Introdução:** Esta parte deve incluir um as equações mais relevantes (devidamente numeradas), as previsões do modelo teórico (de preferência em forma de tabela ou lista) e todos os símbolos utilizados para representar as grandezas físicas envolvidas.

   A introdução não deve possuir mais que duas páginas em texto com fonte 10 ou três páginas manuscritas.

3. **Dados experimentais:** Deve apresentar os dados obtidos (preferencialmente em forma de tabelas), ou seja, todas as grandezas físicas medidas, incluindo suas unidades. Dados considerados anômalos devem ser identificados com uma anotação. **As incertezas de cada medida devem estar indicadas.** As tabelas devem ser numeradas em sequência e conter uma legenda descritiva.

4. **Cálculos:** Todos os cálculos devem ser apresentados, incluindo as etapas intermediárias (cálculo de erros, métodos de análise gráfica, etc.), para

permitir a conferência e recálculo pelo mesmo caminho. Os resultados experimentais devem ser apresentados com os algarismos significativos apropriados.

Em caso de repetição de procedimentos idênticos de cálculo, como, por exemplo, a multiplicação de 10 valores da posição de um corpo por uma constante é permitido que apenas o primeiro cálculo seja detalhado no relatório, mas os resultados de todos eles devem ser apresentados sob a forma de tabela.

Aliás, os valores de cada grandeza obtida por meio dos cálculos devem ser apresentados de forma organizada (preferencialmente sob a forma de tabelas) no fim desta seção.

Caso a tabela com os resultados dos cálculos claramente apresentados não seja incluída, o professor tem a opção de cortar todos os pontos referentes a esta seção do relatório.

Quando houver gráficos, com cálculo de coeficiente angular, estes devem ser incluídos nesta seção. O cálculo do coeficiente deve ser feito nas costas da folha de gráfico.

5. **Análise de dados:** Esta é a parte mais importante do relatório, na qual o aluno verifica **quantitativamente** se o objetivo inicialmente proposto foi atingido. As previsões teóricas mostradas na introdução devem ser confrontadas com os resultados experimentais e a diferença numérica entre os valores esperados e obtidos deve ser discutida. Sempre que possível, a comparação deve ser feita sob a forma de tabelas ou gráficos que devem ser comentado(as) no texto. Também é razoável comentar aqui valores de coeficientes angulares obtidos na seção anterior. O objetivo é comprovar ou não as hipóteses feitas na teoria.

6. **Conclusão:** A conclusão apresenta um resumo dos resultados mais significativos da experiência e sintetiza os resultados que conduziram à comprovação ou rejeição da hipótese de estudo. Aqui deve ser explicitado se os objetivos foram atingidos, utilizando preferencialmente critérios quantitativos. Também se deve indicar os aspectos que mereciam mais estudo e aprofundamento.

7. **Bibliografia:** São as referências bibliográficas que serviram de embasamento teórico.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

2.2 Apresentação dos resultados

Os resultados devem ser apresentados, sempre que possível, em forma de tabelas, destacando dentro de "retângulos" os resultados isolados.

2.3 Recomendações sobre os cálculos numéricos

Deve-se evitar que sucessivos arredondamentos e/ou truncamentos conduzam a valores incorretos para as incertezas resultantes dos cálculos efetuados. Assim, recomenda-se:

- ✓ Efetuar os cálculos intermediários para a propagação das incertezas com, no mínimo, **TRÊS** algarismos "significativos" nas incertezas.
- ✓ Ao avaliar graficamente o coeficiente angular de uma reta e sua incerteza, considere esta avaliação como um cálculo intermediário.
- ✓ Os resultados finais devem ser apresentados com **UM** só algarismo significativo na incerteza.

3 Introdução à Física Experimental

Sempre que se fala em Física Experimental a primeira ideia que vem a mente da maioria das pessoas é a de um Laboratório cheio de molas, massas, balanças, escalas de precisão, multímetros, osciloscópios, dentre mais uma enorme parafernália de objetos e instrumentos. A ideia não está de todo errada, mas é incompleta. O laboratório é apenas uma pequena parte do assunto. A Física Experimental ou, em termos mais amplos, o método experimental, é um dos pilares fundamentais da Ciência. Embora haja ramos da ciência onde a experimentação seja desnecessária, o método experimental é parte essencial do chamado método científico.

Por ora vamos deixar de lado as considerações filosóficas sobre o Conhecimento Científico. Em outra seção falaremos sobre esse importante aspecto. Para nosso propósito imediato podemos dizer que o método científico compreende um conjunto de procedimentos e critérios que permitem compreender e explicar de modo confiável as leis e fenômenos naturais. De modo esquemático e bastante simplificado podemos resumir o método científico com o diagrama abaixo (Figura 1)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

FIGURA 1- DIAGRAMA ESQUEMÁTICO PARA DEFINIR MÉTODO CIENTÍFICO.

O processo compreende as seguintes fases importantes:

- ✓ Observação. Nesta fase de coleta de dados por meio de medidas diversas ocorrem, simultaneamente, dúvidas e ideias acerca do fenômeno observado;
- ✓ Busca de uma relação entre os fatos observados e conceitos ou fatos pré-estabelecidos;
- ✓ Hipóteses, modelos e planejamento de experiências de verificação;
- ✓ Realização dos experimentos. Nesta fase novamente são efetuadas diversas medições criteriosas e cuidadosas;
- ✓ Interpretação dos dados obtidos, conclusões e divulgação dos resultados para que possam ser apreciados, reproduzidos e realimentados por idéias de outros pesquisadores.

Deve-se notar que ao longo de todo o processo, a capacidade interrogativa e criativa do homem acha-se presente e atuante, criando um ciclo dinâmico de retroalimentação de novas dúvidas, novas observações e novas experimentações, Isto gera resultados cada vez mais detalhados e confiáveis ou ainda novas conclusões, estabelecendo-se um acúmulo continuado de conhecimentos.

Para maior confiabilidade, o método experimental deve obedecer ainda a dois requisitos fundamentais. Em primeiro lugar os experimentos devem ser, obrigatoriamente, reprodutíveis por qualquer pessoa e em qualquer lugar, respeitadas as condições e métodos empregados. Em segundo lugar, temos o princípio da falsificação, isto é, toda proposição científica deve admitir experimentos que, caso não forneçam os resultados esperados permitam refutar a hipótese levantada. Uma consequência importante destes aspectos é que qualquer resultado inesperado exige o reexame completo e minucioso das hipóteses e modelos construídos.

A Física é uma ciência que se baseia quase sempre na observação do fenômeno natural e na identificação e medida das propriedades que o caracterizam. Frequentemente, essas observações e medidas não são feitas diretamente pelos nossos sentidos, mas através de equipamentos complexos, desenvolvidos para essa finalidade e fruto, eles também, de experiências anteriores sobre o mesmo tema. A Física, ao mesmo tempo em que busca a solução dos problemas fundamentais de COMO e PORQUE as coisas ocorrem ou são como são, busca, em primeiro lugar, responder às questões QUANDO, QUANTO, a que DISTÂNCIA, de que TAMANHO dentre outras de igual teor. A ciência sempre parte do mais simples para o mais complexo. Uma postura contrária, fatalmente prejudicaria a análise e conduziria a um alto índice de erros.

Como ciência exata, a Física busca desvendar não apenas os aspectos qualitativos dos mistérios da natureza, mas também os aspectos quantitativos. É fácil então entender que a matemática é um instrumento essencial para o físico, pois a matemática é a linguagem que permite expressar de modo exato, unívoco e universal as regularidades e padrões de comportamento observados na natureza. Entretanto, o uso da chamada intuição física é essencial, pois muitas vezes a essência de um fenômeno não pode ser entendida apenas através de equações. Os princípios físicos fundamentais também podem e devem ser entendidos sem auxílio da matemática.

A Física Teórica constrói modelos para explicar fenômenos observados experimentalmente, procurando a partir deles, predizer os resultados de novos experimentos. O critério final de sucesso é a concordância das previsões do modelo com os resultados determinados de forma experimental. Isto cria uma interação e realimentação permanente entre a experiência e a teoria, com desafios cada vez maiores para a inteligência humana.

Percebe-se neste processo todo que a realização de medições é um aspecto muito importante para a Ciência sendo parte fundamental da metodologia científica. Não existe observação ou análise sem alguma forma de medição. Por este motivo, o conhecimento das unidades de medida e dos instrumentos adequados ao tipo de medida que se pretende realizar tem relevância prática fundamental. Além disto, qualquer medição está sujeita a erros. Erros devido a defeitos do instrumento, erros devido à falhas do operador e erros inerentes ao problema em foco. Disto, segue a importância de se conhecer bem os instrumentos e métodos a serem utilizados bem como procurar adquirir um bom embasamento teórico do fenômeno a ser estudado.

4 Teoria da medida e dos erros

4.1 Grandezas Físicas e Padrões de Medidas

Grandezas físicas são propriedades de um ente físico às quais podemos atribuir um valor IMPESSOAL, ou seja, um valor numérico obtido por comparação com um VALOR-PADRÃO. Por exemplo, duas grandezas físicas para um ser humano são: seu peso e sua altura. Quando dizemos, por exemplo, que a altura de um homem é de 1,90 metros, queremos dizer que ele possui uma altura 1,90 vezes o comprimento de um PADRÃO (o metro) gravado em uma barra metálica que está guardada em *Sèvres*, nos arredores de Paris, no *Bureau International dês Poids et Mesures*. Repare que não medimos o homem e sim uma de suas propriedades: a altura. Neste exemplo, o PADRÃO (metro) define uma UNIDADE da grandeza comprimento: uma UNIDADE PADRÃO de comprimento chamada metro. Generalizando, todas as grandezas físicas podem ser expressas em termos de um pequeno número de UNIDADES PADRÕES fundamentais. Neste contexto, fazer uma medida significa comparar uma quantidade de uma dada grandeza, com outra quantidade definida como unidade padrão da mesma grandeza.

A escolha de UNIDADES PADRÕES de grandezas determina o sistema de unidades de todas as grandezas usadas em Física. O sistema de unidades "oficial" usado pela maioria dos cientistas e engenheiros denomina-se normalmente sistema métrico, porém desde 1960, ele é conhecido oficialmente como Sistema Internacional, ou SI (das iniciais do nome francês Système International), porém, ainda existem outros sistemas de unidades utilizados, como o CGS. O SI é baseado em sete UNIDADES PADRÕES FUNDAMENTAIS:

UFES CEUNES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
corrente elétrica	ampère	A
temperatura termodinâmica	kelvin	K
quantidade de substância	mol	mol
intensidade luminosa	candela	cd

As unidades de outras grandezas como velocidade, força, energia e torque são derivadas das sete grandezas acima. Na tabela abaixo estão listadas algumas destas grandezas:

Grandeza	Dimensão	Unidade
Velocidade	m/s	
Trabalho	1 N . m	Joule (J)
Potência	1 J/s	Watt (W)
Força	1 Kg . m/s^2	Newton (N)
Aceleração	1 m/ s^2	
Densidade	1 kg/m^3	

No quadro abaixo também estão listados os prefixos dos múltiplos e submúltiplos mais comuns das grandezas fundamentais, todos na base de potências de 10. Os prefixos podem ser aplicados a qualquer unidade:

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Múltiplo	Prefixo	Símbolo
10^{12}	tera	*T*
10^{9}	giga	*G*
10^{6}	mega	*M*
10^{3}	kilo	*k*
10^{-2}	centi	*c*
10^{-3}	mili	*m*
10^{-6}	micro	*μ*
10^{-9}	nano	*n*
10^{-12}	pico	*p*

Como curiosidade, podemos citar algumas ordens de grandeza do Universo:

Próton	10^{-15} m , 10^{-27} kg
Átomo	10^{-10} m
Vírus	10^{-7} m , 10^{-19} kg
Gota de chuva	10^{-6} kg
Período da radiação da luz visível	10^{-15} s
Terra	10^{7} m , 10^{24} kg , 10^{17} kg
Sol	10^{9} m , 10^{30} kg
Via-Láctea	10^{21} m , 10^{41} kg
Universo Visível	10^{26} m , 10^{52} kg , 10^{18} s

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

4.2 Medidas Físicas

As medidas de grandezas físicas podem ser classificadas em duas categorias: medidas DIRETAS e INDIRETAS. A medida direta de uma grandeza é o resultado da leitura de uma magnitude mediante o uso de instrumento de medida, como por exemplo, um comprimento com régua graduada, ou ainda a de uma corrente elétrica com um amperímetro, a de uma massa com uma balança ou de um intervalo de tempo com um cronômetro.

Uma medida indireta é a que resulta da aplicação de uma relação matemática que vincula a grandeza a ser medida com outras diretamente mensuráveis. Como exemplo, a medida da velocidade média v de um carro pode ser obtida através da medida da distância percorrida S e o intervalo de tempo Δt, sendo $v = \frac{S}{\Delta t}$.

4.3 Erros e Desvios

Algumas grandezas possuem seus valores reais conhecidos e outras não. Quando conhecemos o valor real de uma grandeza e experimentalmente encontramos um resultado diferente, dizemos que o valor observado está afetado de um erro, o qual pode ser definido como:

ERRO ➔ Diferença entre um valor observado (V_{obs}) ao se medir uma grandeza e o valor real (V_{Real}) ou correto da mesma.

$$Erro = V_{obs} - V_{Real} \tag{1}$$

Conforme teremos oportunidade de estudar, obter o valor real da maioria das grandezas físicas, através de uma medida, é quase impossível. Apesar de não podermos encontrar o valor real de determinada grandeza, podemos estabelecer, através de critérios que estudaremos oportunamente, um valor adotado que mais se aproxima do valor real, como é o caso da aceleração da gravidade. Neste caso, ao efetuarmos uma medida, falamos em **desvios** e não em **erros**.

Desvio pode ser definido como:

DESVIO → Diferença entre um valor observado (*V_{obs}*) ao se medir uma grandeza e o valor adotado (*V_{adot}*) que mais se aproxima teoricamente do valor real.

$$Desvio = V_{obs} - V_{adot} \qquad (2)$$

Na prática se trabalha na maioria das vezes com desvios e não com erros.

Os desvios podem ser apresentados sob duas formas:

- Desvio - já definido
- Desvio Relativo - é a relação entre o desvio absoluto e o valor adotado como o mais próximo teoricamente do valor real desta grandeza.

$$\text{Desvio Relativo} = \frac{Desvio}{V_{adotado}} \qquad (3)$$

O desvio relativo percentual é obtido, multiplicando-se o desvio relativo por 100%.

O desvio relativo nos dá, de certa forma, uma informação a mais acerca da qualidade do processo de medida e nos permite decidir, entre duas medidas, qual a melhor.

4.3.1 Classificação de Erros

Por mais cuidadosa que seja uma medição e por mais preciso que seja o instrumento, não é possível realizar uma medida direta perfeita. Ou seja, sempre existe uma incerteza ao se comparar uma quantidade de uma grandeza física com sua unidade.

Segundo sua natureza, os erros são geralmente classificados em três categorias: grosseiros, sistemáticos e aleatórios ou acidentais.

Erros que ocorrem devido à imperícia ou distração do operador. Como exemplos, podemos citar a escolha errada de escalas, erros de cálculo e erro de paralaxe. Devem ser evitados pela repetição cuidadosa das medições.

Os erros sistemáticos são causados por fontes identificáveis, e em princípio, podem ser eliminados ou compensados. Estes erros fazem com que as medidas efetuadas estejam consistentemente acima ou abaixo do valor real, prejudicando a **exatidão** das medidas. Erros sistemáticos podem ser devidos a vários fatores, tais como:

• ao instrumento que foi utilizado, por exemplo, intervalos de tempo medidos com um relógio que atrasa;

• ao método de observação utilizado, por exemplo, medir o instante da ocorrência de um relâmpago pelo ruído do trovão associado;

• a efeitos ambientais, por exemplo, a medida do comprimento de uma barra de metal, que pode depender da temperatura ambiente;

• a simplificações do modelo teórico utilizado, por exemplo, não incluir o efeito da resistência do ar numa medida da gravidade baseada na medida do tempo de queda de um objeto a partir de uma dada altura.

Erros Aleatórios ou Acidentais

Erros devidos a causas diversas, bem como a causas temporais que variam durante observações sucessivas e que escapam a uma análise em função de sua imprevisibilidade, prejudicando a **precisão** das medidas. Podem ter várias origens, entre elas:

- instabilidades nos instrumentos de medidas;
- erros no momento da medida como, por exemplo, uma leitura com precisão maior do que aquela fornecida pela escala;
- pequenas variações das condições ambientais (pressão, temperatura, umidade, fontes de ruídos, etc.);

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Erros aleatórios podem ser tratados quantitativamente através de métodos estatísticos, de maneira que seus efeitos sobre a grandeza física medida, podem ser, em geral, determinados.

A distinção entre erros aleatórios ou sistemáticos é, até certo ponto, subjetiva, entretanto, existe uma diferença clara, a contribuição dos erros aleatórios pode ser reduzida pela repetição das medidas, enquanto àquela relativa a erros sistemáticos em geral é insensível à repetição.

4.3.2 Incertezas

O erro é inerente ao processo de medida, isto é, nunca será completamente eliminado. O erro poderá ser minimizado, procurando-se eliminar o máximo possível as fontes de erro acima citadas. Portanto, ao realizar medidas é necessário avaliar quantitativamente as INCERTEZAS nas medições (Δx). Aqui devem ser diferenciadas duas situações: a primeira trata de medidas diretas, e a segunda de indiretas.

Incertezas em Medidas Diretas

A medida direta de uma grandeza x com sua incerteza estimada pode ser feita de duas formas distintas:

a) Medindo-se apenas uma vez a grandeza x: neste caso, a estimativa de incerteza na medida, Δx, é feita a partir do **instrumento de medida** utilizado (ver-se-á as regras no item 4) e o resultado será expresso por:

$$x \pm \Delta x \tag{4}$$

Obs: O sinal $\pm$ aqui não indica que Δx pode ser tanto positivo como negativo (como no caso $x^2 = 4,\ \text{logo}\ x = \pm 2$), mas sim que o valor obtido na medida é único, porém, devido à limitação do instrumento de medida, não é exatamente o valor lido, e pode ser qualquer número do intervalo [$x - \Delta x$, $x + \Delta x$]. Se forem detectadas outras fontes de erro, o valor de Δx deve ser incrementado com o valor estimado da contribuição do referido erro. Lembre-se: JAMAIS DEVEMOS DISSOCIAR O VALOR DE UMA MEDIDA DO SEU VALOR DE INCERTEZA!

b) Medindo-se N vezes a mesma grandeza x, sob as mesmas condições físicas. Os valores medidos x_1, x_2, ..., x_N não são geralmente iguais entre si e descontando os erros grosseiros e sistemáticos, as diferenças entre eles são atribuídas aos erros aleatórios. Neste caso, o resultado da medida é expresso em função das incertezas como:

$$x = x_m \pm \Delta x \tag{5}$$

onde x_m é o valor médio das N medidas, dado por:

$$x_m = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N} \tag{6}$$

Existem outros parâmetros que podem representar os valores centrais em torno dos quais estes dados se distribuem, tais como: a moda, a média quadrática e a mediana. A escolha do parâmetro depende do tipo de distribuição dos dados e do sistema.

Δx é a incerteza da medida e representa a variabilidade e a dispersão das medidas. Esta incerteza pode ser determinada de várias formas. Neste curso, trabalharemos com a incerteza absoluta e o desvio padrão.

- ✓ *Incerteza Absoluta:*

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{N} \frac{|x_m - x_i|}{N} \tag{7}$$

- ✓ *Desvio Padrão:*

$$\Delta x = \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_m - x_i)^2}{N}} \tag{8}$$

Para um pequeno número de medidas, a incerteza (ou erro) associado a cada medida será dada por (Santoro, Mahon *et al.*, 2005):

$$\Delta x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - x_m)^2}{N-1}} \tag{9}$$

Outra grandeza importante é a incerteza relativa $\delta = \frac{\Delta x}{x_m}$. Por exemplo, se uma barra de aço tem comprimento dado por $(2,5 \pm 0,5)\,m$, significa que esse comprimento está sendo comparado com o padrão denominado metro e que a incerteza associada à medida é de $0,5\ m$. A incerteza relativa nesta medida é de $\frac{0,5}{2,5} = 0,2$ ou 20%.

Quando o número de medidas cresce indefinidamente, a distribuição de frequência das medidas tende, usualmente, à **distribuição de Gauss**. Medidas diretas que se distribuem segundo a distribuição de Gauss, tem a seguinte propriedade:

- 68,3% das medidas estão entre $(x_m - \sigma)\ e\ (x_m + \sigma)$
- 95,5% das medidas estão entre $(x_m - 2\sigma)\ e\ (x_m + 2\sigma)$
- 97,7% das medidas estão entre $(x_m - 3\sigma)\ e\ (x_m + 3\sigma)$

Dependendo do tipo de sistema, outros tipos de distribuições estatísticas podem ser mais indicados, como por exemplo: a **distribuição de Poisson**, **distribuição Binomial**, **distribuição Gama**, etc.

Os valores médios e os desvios padrões podem ser obtidos por programas de ajustes, como por exemplo, o **Origin** e algoritmos do **MATLAB**, a partir de um conjunto de medidas.

Incertezas em Medidas Indiretas

Geralmente é necessário usar valores medidos e afetados por incertezas para realizar cálculos a fim de se obter o valor de outras grandezas indiretas. É necessário conhecer como a incerteza na medida original afeta a grandeza final.

5 Propagação de incertezas - Crítica ao resultado da medição de uma grandeza

Nas medidas indiretas o valor da grandeza final dependerá das incertezas de cada uma das grandezas obtidas direta ou indiretamente, bem como da forma da expressão matemática utilizada para obtê-las.

CEUNES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Consideremos que a grandeza V a ser determinada esteja relacionada com outras duas ou mais, através da relação: $V = f(x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, ..., x_n \pm \Delta x_n)$, onde f é uma função conhecida de $x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, ..., x_n \pm \Delta x_n$.

Examinaremos então como se obtém a incerteza do valor da grandeza que se mede indiretamente, em função das incertezas das medidas diretas.

Um método usualmente aplicado e que nos dá o valor de ΔV, imediatamente, em termos de $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, é baseado na aplicação do cálculo diferencial:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial V}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \tag{10}$$

Uma derivada parcial, como por exemplo $\frac{\partial V}{\partial x_1}$, é a derivada de *V* em relação a x_2, assumindo as demais *n-1* variáveis (as demais grandezas diretas) constantes. Para maiores detalhes, consulte livros de cálculo diferencial e numérico.

Os termos do tipo $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ são denominados FATORES DE SENSIBILIDADE de *V* em relação a x_i.

Outra equação encontrada na literatura (deduzida a partir do cálculo estatístico considerando uma distribuição Gaussiana) é:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 \Delta x_i^2} \tag{11}$$

Consideremos agora, um método mais imediato, envolvendo apenas operações de álgebra elementar.

5.1 Soma ou subtração

Considerando as medidas de n grandezas: *A, B, C, ...,* e suas respectivas incertezas:

$$\left.\begin{array}{r} A = a \pm \Delta a \\ B = b \pm \Delta b \\ C = c \pm \Delta c \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} a,\ b,\ c,\cdots = valores\ medidos \\ \pm\Delta a,\ \pm\Delta b,\ \pm\Delta c,\cdots = incertezas\ absolutas \end{array} \right) \tag{12}$$

$$S = A + B + C + \ldots \tag{13}$$

$$S = s \pm \Delta s \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s = \text{valor da soma} \\ \pm\Delta r = \text{incerteza absoluta da soma} \end{array} \right\} \tag{14}$$

Neste caso, aplicando a equação (11),

$$\Delta s = \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial a}\right)^2 (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial b}\right)^2 (\Delta b)^2 + \ldots} = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + \ldots} \tag{15}$$

Aplicando a equação (10), obtém-se:

$$s \pm \Delta s = (a + b + c + \ldots) \pm (|\Delta a| + |\Delta b| + |\Delta c| + \ldots) \tag{16}$$

Para o caso da subtração as expressões análogas são:

$$\Delta d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial a}\right)^2 (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial b}\right)^2 (\Delta b)^2 + \ldots} = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + \ldots} \tag{17}$$

ou

$$d \pm \Delta d = (a - b - c - \ldots) \pm (|\Delta a| + |\Delta b| + |\Delta c| + \ldots) \tag{18}$$

As incertezas se somam!

5.2 Outras operações

A multiplicação, a divisão, a radiciação e a potenciação, poderão ser englobadas na fórmula monômio.

$$F = K.A.B^{\alpha}.C^{\beta} \tag{19}$$

Demonstra-se teoricamente (faça a derivada e analise) que, adotando a equação (10), a incerteza absoluta $\pm\Delta f$ poderá ser colocada em função das incertezas absolutas das grandezas que a compõem pela seguinte fórmula:

$$\pm\Delta f = \pm f\left[\left|\frac{\Delta k}{k}\right| + \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\alpha\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|\beta\frac{\Delta c}{c}\right|\right] \quad (20)$$

onde:

$A = a \pm \Delta a$

$B = b \pm \Delta b$

$C = c \pm \Delta c$

$K = k \pm \Delta k \Rightarrow$ Constante que não depende da medida

$$F = f \pm \Delta f \Rightarrow f = k.a.b^{\alpha}.c^{\beta} \quad (21)$$

Discussão sobre a constante K

A constante **K** poderá aparecer nas seguintes formas:

- ✓ Número formado por quantidade finita de dígitos (número exato). Neste caso a incerteza absoluta é nula.
- ✓ Número que matematicamente comporte infinitos dígitos (irracional, dízima). Neste caso a incerteza absoluta dependerá da quantidade de dígitos adotada. Se utilizarmos uma calculadora que opere com dez dígitos, teremos π = 3,141592654. O último dígito foi arredondado pela máquina; está afetado por uma "incerteza" de uma unidade (no máximo = 0,000000001).

6 Algarismos Significativos

A medida de uma grandeza física é sempre aproximada, por mais capaz que seja o operador e por mais preciso que seja o aparelho utilizado. Esta limitação reflete-se no número de algarismos que usamos para representar as medidas. Devemos utilizar só os algarismos medidos ou calculados pela média que são confiáveis devido à precisão do instrumento utilizado, admitindo-se apenas o uso de um único algarismo duvidoso. Por exemplo, se afirmarmos que o resultado de uma

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

medida é $3,24\,cm$ estamos dizendo que os algarismos 3 e 2 são precisos e que o algarismo 4 é o duvidoso, não tendo sentido físico escrever qualquer algarismo após o número 4.

Algumas observações devem ser feitas:

1. Não é algarismo significativo o zero à esquerda do primeiro algarismo significativo diferente de zero. Assim, tanto $l = 32,5m$ como $l = 0,325\,x10^2\,m$ representam a mesma medida e têm 3 algarismos significativos. Outros exemplos:

   ✓ $4 = 0,4 \times 10 = 0,04 \times 10^2 = 0,004 \times 10^3$ (1 algarismo significativo);

   ✓ $0,00036606 = 0,36606 \times 10^{-3} = 3,6606 \times 10^{-4}$ (5 algarismos significativos).

2. Zero à direita de algarismo significativo também é algarismo significativo. Portanto, $l = 32,5\,cm$ e $l = 32,50\,cm$ são diferentes, ou seja, a primeira medida têm 3 algarismos significativos, enquanto a segunda é mais precisa e têm 4 algarismos significativos.

3. **Arredondamento**. Quando for necessário fazer arredondamento de algum número utilizaremos a seguinte regra: quando o último algarismo depois dos significativos for menor que 5 este é abandonado; quando o último algarismo for maior ou igual a 5, somamos 1 unidade ao algarismo significativo anterior. Exemplo:

   ✓ 8,234 cm é arredondado para 8,23 cm;

   ✓ 8,235 cm é arredondado para 8,24 cm;

   ✓ 8,238 cm é arredondado para 8,24 cm.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

4. Operações com algarismos significativos:

a. Soma e subtração: Após realizar a soma, o resultado deve apresentar apenas um algarismo duvidoso. Exemplo:

✓ 133,35cm – 46,7cm = 86,65cm = 86,7cm.

b. Produto e divisão: O resultado da operação deve ser fornecido com o mesmo número de algarismos significativos do fator que tiver o menor número de algarismos significativos. Exemplos:

✓ 32,74cm x 25,2cm = 825,048cm^2 = 825cm^2

✓ $\frac{37,32}{7,45} = 5,00940\,\frac{m}{s} = 5,01\frac{m}{s}$

c. Algarismos significativos em medidas com incerteza. Suponhamos que uma pessoa ao fazer uma série de medidas do comprimento de uma barra l, tenha obtido os seguintes resultados:

✓ Comprimento médio: $l = 82,7390$ *cm;*

✓ Incerteza estimada: $\Delta l = 0,538$ *cm;*

como a incerteza da medida está na casa dos décimos de *cm*, não faz sentido fornecer os algarismos correspondentes aos centésimos, milésimos de *cm* e assim por diante. Ou seja, a incerteza estimada de uma medida deve conter apenas um algarismo significativo. Os algarismos a direita deste, serão utilizados apenas para efetuar os cálculos e arredondamentos ou simplesmente desprezados. Neste caso Δl deve ser expresso apenas por:

$$\Delta l = 0,5cm;$$

os algarismos 8 e 2 do valor médio são exatos, porém o algarismo 7 já é duvidoso porque o erro estimado afeta a casa que lhe corresponde. Deste modo, os algarismos 3, 9 e 0 são desprovidos de significado físico e não é correto escrevê-los: estes algarismos são utilizados para efetuar os cálculos e arredondamentos ou simplesmente desprezados. O modo correto de escrever o resultado final desta medida será então:

$$l = (82,7 \pm 0,5)cm.$$

Quando se trabalha com uma grandeza sem explicitar a sua incerteza é preciso ter em mente a noção exposta no texto referente ao conceito de algarismo significativo. Mesmo que não esteja explicitada, você sabe que a incerteza afeta "diretamente" o último dígito de cada número. Para verificar esta afirmação sugerimos que assinale com um traço todos os algarismos cuja ordem seja superior ou igual à ordem de grandeza da incerteza. Considere algarismo significativo, os algarismos assinalados.

Exemplos:

a) $\overline{186},3 \pm 1,7 \rightarrow 186 \;\; ou \;\; 1,86x10^{-2}$

b) $\overline{45,37} \pm 0,13 \rightarrow 45,4 \;\; ou \;\; 4,54\,x10$

c) $\overline{2523}1 \pm 15 \rightarrow 2,523x10^{4}$

As operações que você efetuar com qualquer grandeza darão como resultado um número que tem uma quantidade "bem definida" de algarismos significativos.

6.1 Exercícios

1) Verifique quantos algarismos significativos apresentam os números abaixo:

   a) 0,003055 b) 1,0003436 c) 0,0069000 d) 162,32 x 10^{6}.

2) Aproxime os números acima para 3 algarismos significativos.

3) Efetue as seguintes operações levando em conta os algarismos significativos:

   a) (2,5 $\pm$ 0,6) cm + (7.06 $\pm$ 0,07) cm;

   b) (0,42 $\pm$ 0,04) g/(0,7 $\pm$ 0,3) cm;

   c) (0,7381 $\pm$ 0,0004) cm x (1,82 $\pm$ 0,07) cm;

   d) (4,450 $\pm$ 0,003) m - (0,456 $\pm$ 0,006) m.

4) Efetue as seguintes operações levando em conta os algarismos significativos:

   a) 2,3462 cm + 1,4 mm + 0,05 m;

b) 0,052 cm/1,112 s;

c) 10,56 m – 36 cm.

5) As medidas da massa, comprimento e largura de uma folha foram obtidas 4 vezes e os resultados estão colocados na tabela abaixo. Usando estes dados e levando em conta os algarismos significativos, determine:

a) os valores médios da massa, comprimento e largura da folha;

b) as incertezas absolutas das medidas da massa, comprimento e largura da folha;

c) os desvios padrão das medidas de massa, comprimento e largura da folha;

d) as incertezas relativas das medidas da massa, comprimento e largura da folha.

Massa (g)	Largura (cm)	Comprimento (cm)
4,51	21,0	30,2
4,46	21,2	29,8
4,56	20,8	29,9
4,61	21,1	30,1

6) Utilizando os resultados do exercício 5 e a teoria de propagação de erros, determine:

a) A área da folha e sua respectiva incerteza;

b) A densidade superficial da folha e sua respectiva incerteza.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

7 Instrumentos de medida

7.1 Introdução

Descreveremos em detalhes alguns dos instrumentos mais utilizados para medir grandezas físicas de massa, tempo e comprimentos, com enfoque nos aparelhos disponíveis no laboratório. São eles:

Grandeza	Aparelho	Precisão
Comprimento	Régua	1 mm
Comprimento	Paquímetro	0.1 mm
Massa	Balança Digital	-
Tempo	Cronômetro	0,01s até 0,0001s

A precisão de um instrumento de medida corresponde à quantidade mínima da grandeza física que o instrumento é capaz de diferenciar. Por exemplo, numa régua centimetrada, a precisão é de 1cm.

O resultado de uma medida deve vir sempre na forma:

$$m \pm \Delta m \quad (4.1)$$

onde m é o valor medido na escala do instrumento e Δm é a incerteza associada á medida. Esta incerteza depende do aparelho utilizado e dos erros aleatórios ocorridos durante a medida. Portanto, podemos escrever Δm como a soma de duas contribuições, e será chamada incerteza total:

$$\Delta m = \Delta m_{aparelho} + \Delta m_{aleatórios} \quad (4.2)$$

O cálculo das incertezas aleatórias, como já foi mostrado, depende do número de medidas e das operações envolvidas na obtenção da grandeza m. O cálculo de $\Delta m_{aparelho}$ (incerteza do aparelho) depende do instrumento utilizado e há diversos critérios para determiná-la (quando a mesma não for informada pelo fabricante). Nesse sentido, é interessante classificar os aparelhos em analógicos e não analógicos. Esta classificação surge em função da escala do aparelho, e da possibilidade de estimativa de incerteza, conforme veremos a seguir.

7.2 Aparelhos Analógicos

Os instrumentos analógicos são aqueles onde a análise das escalas permite que o algarismo duvidoso da medida seja avaliado. Neste caso, é usual adotar a incerteza da escala como sendo a metade da precisão. Ou seja,

$$\Delta m_{aparelho} = \frac{1}{2}(\text{precisão do aparelho}) \quad (4.3)$$

Alguns exemplos são: réguas, multímetros, cronômetros, balança de braço e termômetros.

7.2.1 A régua milimetrada

Instrumento capaz de medir comprimentos com a precisão máxima de milímetros. O erro de escala é:

$$\Delta m_{aparelho} = \frac{1}{2}(\text{precisão do aparelho}) = 0,5\,mm\,. \quad (4.4)$$

Para entender a origem deste critério, considere, por exemplo, que desejamos medir o tamanho de uma folha de papel usando uma régua milimetrada. Com o olho bem treinado ou com o auxílio de uma lupa, e se os traços da marcação dos milímetros inteiros da régua forem suficientemente estreitos, pode-se avaliar até décimos de milímetro. Contudo, este procedimento pode não ser válido. Se uma régua é graduada em milímetros é porque o material com que é feito pode resultar em variações do comprimento total comparáveis com a sua menor divisão. Ou então, o próprio processo de fabricação pode não ser seguro, dando variações comparáveis com a menor divisão. Nestes casos, supor a régua exata e avaliar décimos de milímetro pode se irrealista. Por outro lado, arredondando até o milímetro inteiro mais próximo pode acarretar perda de informação. Assim, avaliar a incerteza em metade da precisão é um meio termo aceitável. É importante notar que esta incerteza corresponde na verdade ao erro máximo que pode ser cometido utilizando uma régua milimetrada, excluindo-se os erros aleatórios. A figura abaixo mostra um exemplo de leitura utilizando uma régua.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

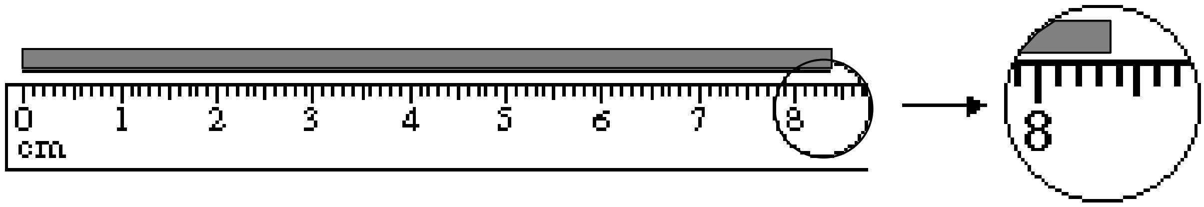


FIGURA 2- EXEMPLO DE UMA MEDIDA FEITA COM RÉGUA MILIMETRADA.

Neste caso podemos avaliar o comprimento da barra em 8,36 cm. Assim, os algarismos exatos são 8 e 3, ao passo que o duvidoso é 6, uma vez que sua obtenção surgiu de uma apreciação do experimentador. Portanto, o resultado final da medida deve ser $l=(8,36\pm0,05)$ cm. Se utilizássemos um paquímetro poderíamos obter para a grandeza em foco um valor de 8,371 cm. Neste caso, quais os algarismos duvidosos e quais os exatos? Já um micrômetro nos permitiria obter um valor que poderia ser 8,3713 cm.

7.2.2 Balança Tri-Escala

A balança tri-escala é assim denominada porque possui três escalas: uma graduada em gramas, outra em dezenas de gramas, outra em centésimos de gramas. Assim o resultado de uma medida com esta balança pode ser apresentado com algarismos até a casa do milésimo da grama, sendo este algarismo duvidoso. A precisão da balança é na casa do centésimo de grama. Antes de fazer uma medida com a balança, deve-se verificar se a mesma está zerada. Para isto, sem nenhum objeto no prato da balança, deve ser verificado se, ao colocar os pesos das escalas nos zeros das mesmas, o ponteiro situado na extremidade do braço da balança está apontando para o zero de uma escala vertical, situado nesta extremidade. A inclinação do braço da balança pode ser ajustada girando um parafuso situado na base da balança. A balança deve ser zerada para evitar erros sistemáticos nas medidas.

Ao pesar um objeto colocando-o no prato da balança, o braço desta ficará levantado, sendo necessário posicionar os pesos das escalas de forma que o ponteiro volte para o zero da escala vertical. Assim feito, os números nas escalas, indicados pelos pesos das escalas, poderão ser lidos.

UFES CEUNES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Como exemplo, a leitura feita na figura abaixo (e indicada pelas flechas) seria de $m = (165,345 \pm 0,005)\ g$, onde $0,005\ g$ corresponde á incerteza da medida.

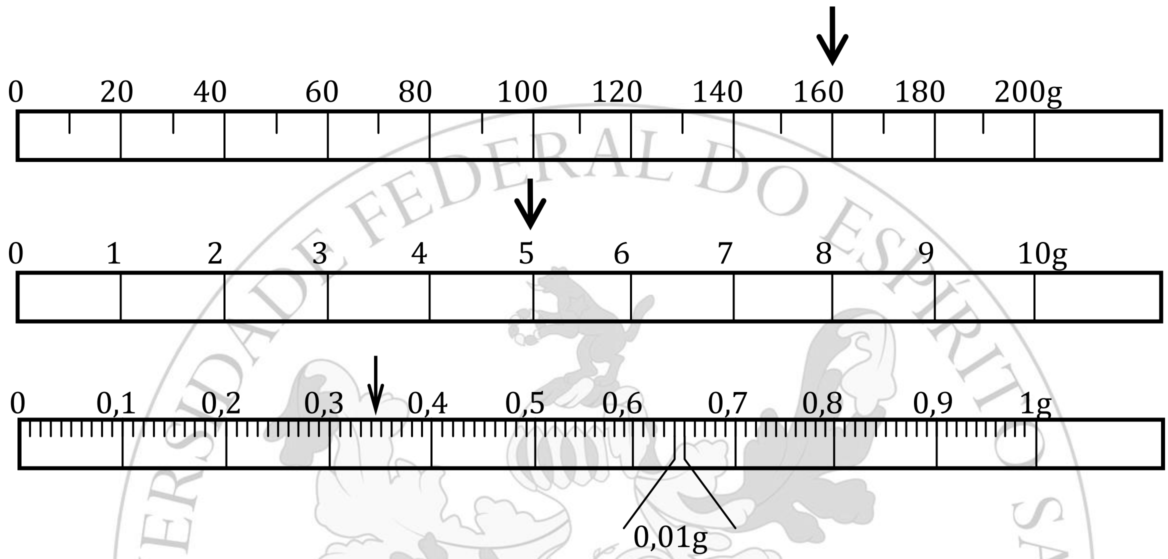


FIGURA 3 - BALANÇA TRI-ESCALA.

7.3 Aparelhos não Analógicos

7.3.1 Aparelhos Digitais

Os aparelhos digitais não permitem que o erro de escala seja avaliado: o algarismo duvidoso é simplesmente lido no display do aparelho, ou conforme especificado pelo fabricante. Usualmente, o erro corresponde ao menor valor que o aparelho pode medir:

$$\Delta m_{aparelho} = \text{precisão do aparelho} \tag{4.5}$$

Alguns exemplos de aparelhos digitais são: o cronômetro digital, termômetro digital e multímetro digital. Como exemplo, descreveremos em detalhes o processo de medida de um cronômetro digital e de um multímetro digital.

Cronômetros são aparelhos que medem intervalos de tempo e cuja precisão depende do fabricante. Os cronômetros utilizados neste curso apresentam um display digital com intervalos de tempo no formato:

XX	XX'	XX″	XX‴
horas	minutos	segundos	décimos de segundos

Portanto, o último dígito de precisão encontra-se na casa dos centésimos de segundo. Assim, o erro de escala deste aparelho corresponde à menor medida que o mesmo pode fazer, ou seja:

$$\Delta m_{aparelho} = 0,01s \qquad (4.6)$$

Desta forma, um exemplo de leitura com display indicando 0201 significa $(2{,}01 \pm 0{,}01)$ s.

Obs: Lembre-se quando o cronômetro for acionado manualmente, deve ser incluído também o tempo de reação humano, que é de aproximadamente 0,1 s para cada acionamento.

Multímetros digitais são aparelhos multi-utilidades que medem várias grandezas elétricas, como: resistência, tensão, corrente, capacitância, indutância, tensões de junções de diodos e de transistores, etc. Os multímetros apresentam um display digital e várias escalas para cada função, que podem ser selecionadas por um cursor. Para perfeita utilização, **NUNCA UTILIZE O MULTÍMETRO SEM ORIENTAÇÃO DO PROFESSOR E NUNCA USE A SELEÇÃO AMPERÍMETRO EM PARALELO COM A FONTE, POIS VOCÊ PODE DANIFICÁ-LO!!!**

Para o caso do multímetro, existem duas fontes de erro possíveis:

a) o último algarismo (z) pode flutuar em torno do valor mais estável e neste caso a incerteza devido à flutuação é calculada, estimando-se a flutuação média em torno do valor mais provável do último algarismo, da seguinte forma:

$$\Delta x_f = (z_{\max} - z_{\min}) / 2 \tag{4.7}$$

b) o limite de erro instrumental (Δx_i) fornecido pelo fabricante que possui a forma:

$$\Delta x_i = a\% \text{ da leitura} + b \text{ dígitos no último algarismo}$$

A incerteza absoluta resultante das duas contribuições é:

$$\Delta x = \Delta x_f + \Delta x_i \tag{4.8}$$

Como exemplo, se uma leitura mais estável no amperímetro foi 33,04 mA e flutuou entre 33,02 e 33,05 mA na escala de 200 mA, que por sua vez, possui uma incerteza de 0,05% da leitura + 2 dígitos, então:

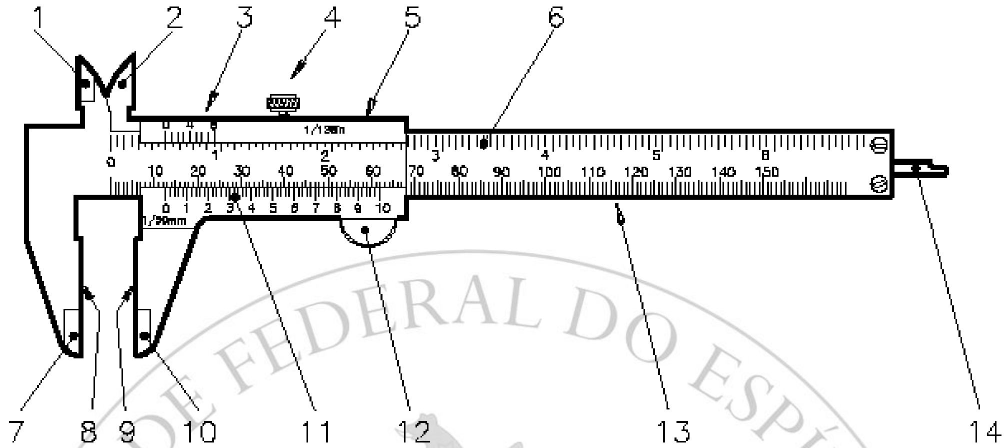
$$\Delta x_f = (0,05 - 0,02)/2 = 0,015$$
$$\Delta x_i = 0,0005 \cdot 33,03 + 0,02 = 0.036515$$
$$\Delta x = 0,015 + 0.036515 = 0,051515 = 0,05$$

O valor da medida é então: $i = 33,04 \pm 0,05$ mA.

Aparelhos com Nônio: O Paquímetro.

O paquímetro é um instrumento usado para medir as dimensões lineares internas, externas e de profundidade de um corpo. Consiste em uma régua graduada, com encosto fixo, sobre a qual desliza um cursor.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas



1. Orelha fixa
2. Orelha móvel
3. Nônio ou vernier (polegada)
8. Encosto fixo
9. Encosto móvel
10. Bico móvel
11. Nônio ou vernier (milímetro) 12. Impulsor

FIGURA 4 - PAQUÍMETRO.

O cursor ajusta-se à régua e permite sua livre movimentação, com um mínimo de folga. Para muitas medidas com escalas graduadas é desejável estimar-se uma fração da menor divisão das mesmas. Existe um dispositivo que aumenta a precisão desta estimativa: o nônio ou vernier (acoplado ao cursor). Esta escala especial foi criada por Pierre Vernier (1580-1637), para obter medidas lineares menores que a menor divisão de uma escala graduada.

O nônio ou vernier nos permite efetuar a leitura de uma fração da menor divisão de uma régua ou escala graduada. Ele é constituído de uma pequena escala com N divisões de valores conhecidos, que se move ao longo da régua principal, porém relacionam-se entre si de uma maneira simples. Por exemplo, considere um paquímetro possuindo um nônio com N = 10 divisões que correspondem, em comprimento, a 9 divisões da escala principal. Cada divisão do nônio é mais curta que a divisão da escala principal de $\frac{1}{N}$ da divisão desta escala.

UFES CEUNES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

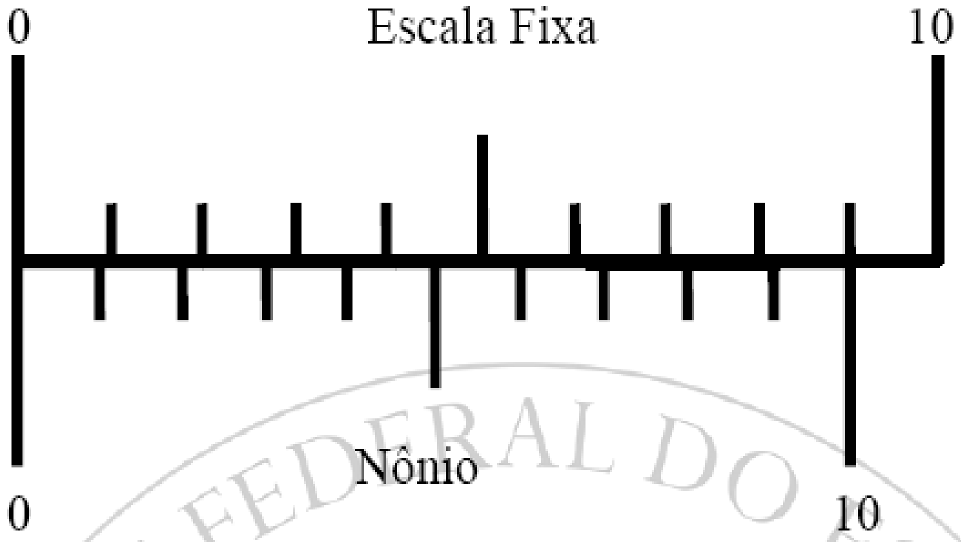


FIGURA 5 - REPRESENTAÇÃO DO NÔNIO.

Neste caso, a primeira divisão do nônio é $\frac{1}{10}$ mais curta que a divisão da escala principal. A segunda divisão do nônio está a $\frac{2}{10}$ de divisão a esquerda da próxima marca da escala principal, e assim por diante, até a décima marca do nônio coincida com a nona marca da escala principal. Se a escala Vernier é movida para a direita até que uma marca sua coincida com uma marca da escala principal, o número de décimos de divisões da escala principal que a escala do nônio se deslocou é o número de divisões do nônio, ***n***, contadas a partir de sua marca zero até a marca do nônio que coincidiu com uma marca qualquer da régua principal. Um exemplo de leitura é mostrado na figura abaixo, na qual o comprimento l corresponde a $(12,4 \pm 0,1)\ mm$, onde neste caso, a incerteza do aparelho corresponde à precisão do mesmo.

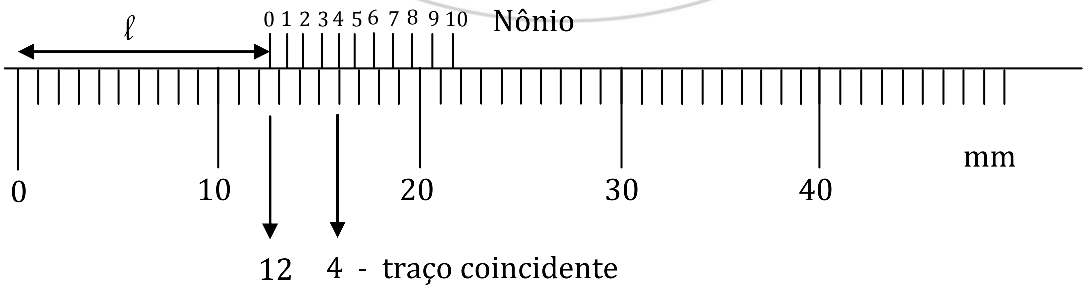


FIGURA 6- EXEMPLOS DE MEDIDAS UTILIZANDO UM PAQUÍMETRO.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Para se obter bons resultados na medição:

1. O contato dos encostos com as superfícies do objeto deve ser suave. Exageros na pressão do impulsor podem danificar o objeto e resultar em medidas falsas;

2. Manter a posição correta do paquímetro relativamente ao objeto. Inclinações do instrumento alteram as medidas.

3. Antes de efetuar as medições, limpar as superfícies dos encostos e as faces de contato do objeto;

4. Medir o objeto a temperatura ambiente. As possíveis dilatações térmicas acarretam erros sistemáticos;

Ao fazer a leitura, orientar a visão na direção dos traços e perpendicular a linha longitudinal do instrumento.

Em nosso laboratório o paquímetro possui um nônio com $N = 20$ divisões que correspondem, em comprimento, a 39 divisões da escala principal. A precisão do mesmo é de 0,05 m, que corresponde ao valor da incerteza.

7.4 Exercício em Grupo: Medidas de Densidade Superficial

Material: folha, régua, paquímetro e balança.

1. Densidade superficial de uma folha.

   a) Cada aluno do grupo deve medir, utilizando uma régua milimetrada, as dimensões L_1 e L_2 da folha;

   b) Fazer a média das medidas de L_1 e L_2 , com seus respectivos erros totais ΔL_1 e ΔL_2;

   c) Determinar a área média (A) da folha, com sua incerteza ΔA.

   d) Cada aluno do grupo deve medir a massa da folha com a balança;

   e) Fazer a média das medidas da massa (m) da folha e obter a respectiva incerteza total (Δm);

   f) Obter a densidade superficial da folha (·), com a respectiva incerteza ($\Delta\rho$).

2. Repetir as medidas do item 1. com o paquímetro.

3. Comparar a densidade superficial média da folha (com sua respectiva incerteza total) obtida utilizando a régua milimetrada e o paquímetro.

Use as tabelas abaixo para expressar as medidas e os cálculos:

- Medidas da densidade superficial (·) da folha:

Régua		Paquímetro		Balança
L_1 (cm)	L_2 (cm)	L_1 (cm)	L_2 (cm)	m (g)

- Cálculos

	Régua		Paquímetro		Balança
	L_1 (cm)	L_2 (cm)	L_1 (cm)	L_2 (cm)	m (g)
Valor médio					
Incerteza absoluta					
Desvio Padrão					
Incerteza Total*					

- A incerteza devido aos erros aleatórios deve ser escolhida entre a incerteza absoluta ou desvio padrão.

- Resultados finais

Régua		Paquímetro	
A (cm^2)	ΔA (cm^2)	A (cm^2)	ΔA (cm^2)
· (cm^2)	$\Delta\rho$ (g/cm^2)	· (cm^2)	$\Delta\rho$ (g/cm^2)

8 Gráficos

8.1 Introdução

Um gráfico é uma curva que mostra a relação entre duas variáveis medidas. Quando, em um fenômeno físico, duas grandezas estão relacionadas entre si o gráfico dá uma ideia clara de como a variação de uma das quantidades afeta a outra.

Assim, um gráfico bem feito pode ser a melhor forma de apresentar os dados experimentais. Ao realizarmos uma medida sugere-se colocar num gráfico todos os pontos experimentais e traçar curvas que se ajustem o mais aproximadamente possível a esses pontos. A forma dessas curvas pode auxiliar o experimentador a verificar a existência de leis físicas ou leva-lo a sugerir outras leis não previamente conhecidas.

Muitas vezes nos defrontaremos com o problema de encontrar uma função que descreva apropriadamente a dependência entre duas grandezas medidas no laboratório. Algumas das curvas mais comuns são: a reta, parábolas, exponenciais, senóides, etc.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

8.2 Construção de Gráficos

Há algumas regras básicas que devem ser seguidas na construção de gráficos:

1. Colocar um título, especificando o fenômeno físico em estudo, que relaciona as grandezas medidas;

2. Escrever nos eixos coordenados as grandezas representadas, com suas respectivas unidades. A escala deve conter a informação do número de algarismos significativos das medidas. No eixo horizontal (abscissa) é lançada a *variável independente*, isto é, a variável cujos valores são escolhidos pelo experimentador, e no eixo vertical é lançada a *variável dependente*, ou seja, aquela obtida em função da primeira;

3. Em geral, a relação de aspecto (altura/largura) deve ser menor do que 1, pois o gráfico será de mais fácil leitura (por esta razão é que a tela de cinema e a da televisão tem relação de aspecto menor do que 1);

4. Se possível cada eixo deve começar em zero;

5. Escolher escalas convenientes tais que facilitem tanto a construção quanto a leitura dos gráficos. A escala deve ser simples e sugere-se adotar valores múltiplos ou submúltiplos de números inteiros;

6. A escala adotada num eixo não precisa ser igual à do outro;

7. Escolher escalas tais que a curva cubra aproximadamente toda a folha disponível do papel do gráfico;

8. Deve-se ter o cuidado de nunca assinalar na escala as coordenadas dos dados experimentais;

9. Marque cada um dos pontos do gráfico, cuidadosamente e claramente, escolhendo para isto um símbolo adequado e de tamanho facilmente visível (por exemplo, um círculo ou um quadradinho) com um pontinho no centro. Nunca marque os pontos apenas com um pontinho do lápis;

10. Marque claramente as barras de erro em cada ponto. Se o erro for muito pequeno para aparecer na escala escolhida anote ao lado: as barras de erro são muito pequenas para aparecer na figura;

UFES CEUNES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

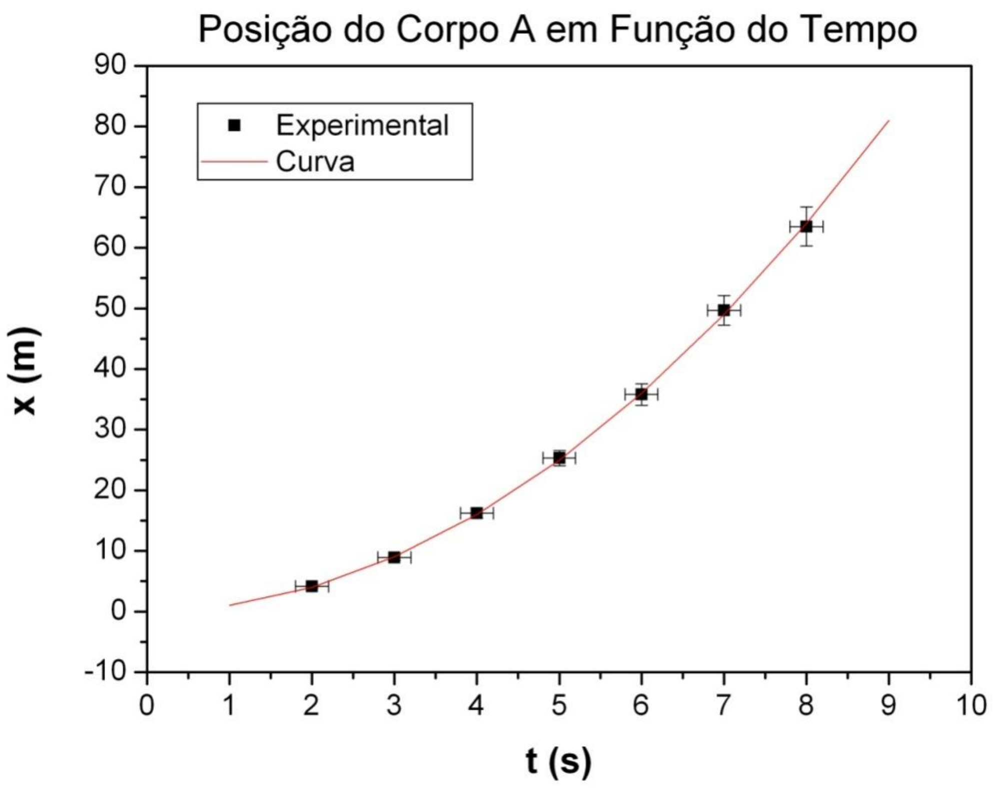


Figura 7 – Gráfico mostrando os dados experimentais e a curva traçada.

Quando todos os pontos experimentais já estiverem marcados no gráfico, resta traçar a curva. Esta não precisa passar sobre todos os pontos; de fato, é possível que a curva não passe por nenhum ponto do gráfico. Sendo assim, não é necessário que a curva tenha início no primeiro e termine no último ponto experimental. A figura 7 mostra um exemplo de dados experimentais cuja dependência é caracterizada por uma parábola. Os quadrados (▪) representam os dados experimentais e sua dispersão é devida aos erros cometidos durante a experiência. A linha contínua representa a curva que melhor descreve a dependência quadrática da grandeza x com a grandeza y.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

8.3 Gráficos e Equações Lineares

A seguir trataremos apenas de grandezas físicas (x e y) relacionadas por uma dependência linear, ou seja, por uma função y=f(x), onde f(x) obedece a equação de uma reta: y=ax+b, com a e b constantes, onde a é o coeficiente angular e b é o coeficiente linear.

O coeficiente angular corresponde à inclinação da reta, ou seja, $a = \Delta y / \Delta x$, enquanto que o coeficiente linear b é obtido pela interseção da reta com o eixo y, como indica a Figura 8.

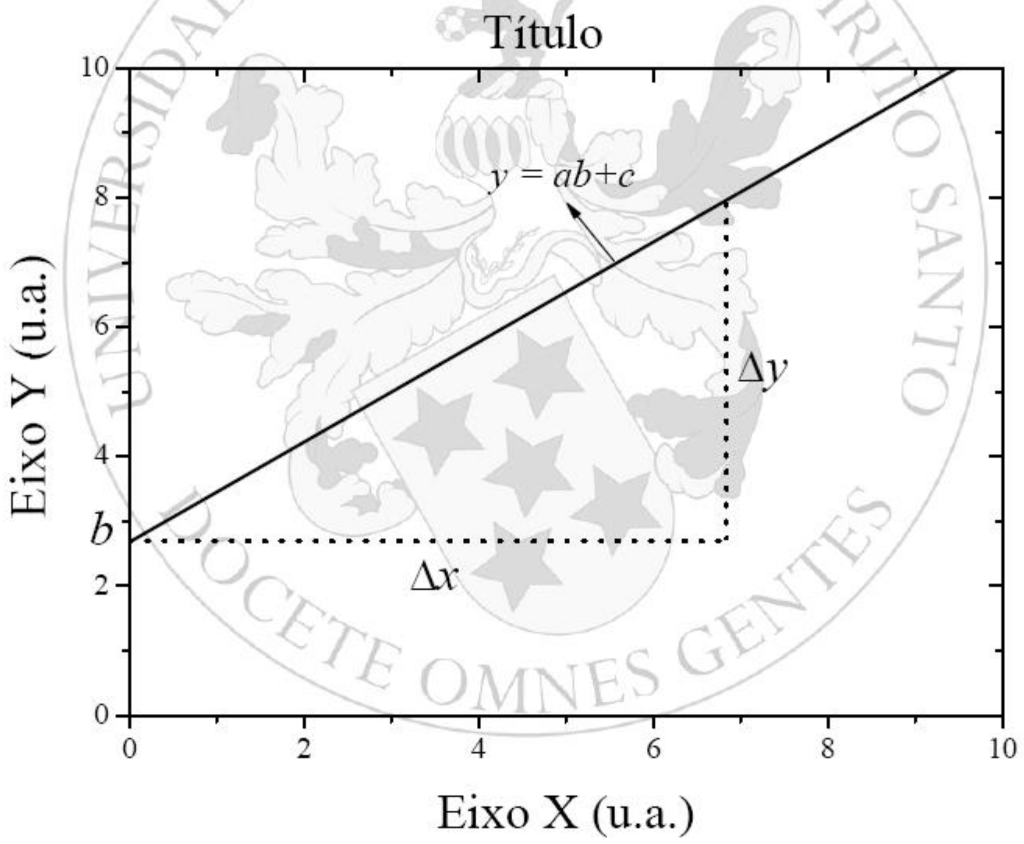


Figura 8 – Determinação dos coeficientes a e b da curva y.

Alguns exemplos típicos são:

1. Movimento retilíneo uniforme (MRU):

Neste caso têm-se duas grandezas físicas (posição x e tempo t) relacionadas pela função linear:

$$x = v_0 t + x_0 \quad , \tag{5.1}$$

onde é a velocidade do corpo (constante) e x_0 sua posição inicial. Portanto, lançando num gráfico os pontos medidos de t (no eixo x) e x (no eixo y), conforme a Figura 9, teremos o coeficiente angular correspondente a v_0 e o coeficiente linear a x_0.

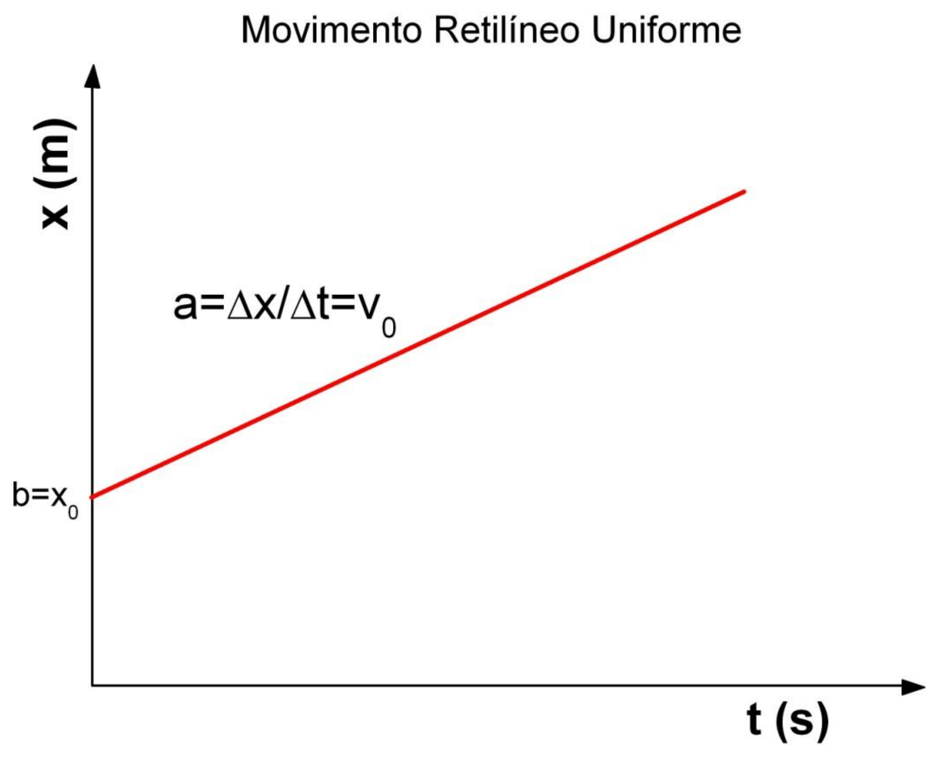


Figura 9 – Exemplo de gráfico do movimento retilíneo uniforme.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

2. Movimento retilíneo uniformemente acelerado (MRUA):

Neste tipo de movimento temos duas grandezas físicas: tempo t e velocidade v de um corpo sujeito a uma aceleração constante a, descrito pela função:

$$v = at + v_0 \tag{5.2}$$

Neste caso, a construção de uma reta com eixo x correspondendo ao tempo t e a velocidade v ao eixo y, implicará que os coeficientes angular e linear fornecerão os valores da aceleração a e da velocidade inicial v_0 do movimento, respectivamente.

A seguir, descreveremos dois métodos que nos permitem determinar estes coeficientes a partir dos dados experimentais.

8.4 Métodos de Determinação dos Coeficientes *a* e *b*

Conforme já foi mencionado, será comum em laboratório nos defrontarmos com medidas de grandezas correlacionadas com as quais não temos uma relação estabelecida. Nestes casos quase sempre a primeira atitude é buscar através de gráficos uma lei simples ligando uma grandeza à outra. Aqui apresentaremos dois métodos para determinar esta relação no caso de uma dependência linear, a partir de dados experimentais.

8.4.1 Método Gráfico

Este método permite estimar os parâmetros de uma reta e é recomendado quando não se dispõe de calculadora ou computador para realização de cálculos. As únicas ferramentas necessárias são: um lápis (ou caneta) e uma régua (de preferência transparente).

Para ilustrar o método, consideremos os dados representados na figura 10.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

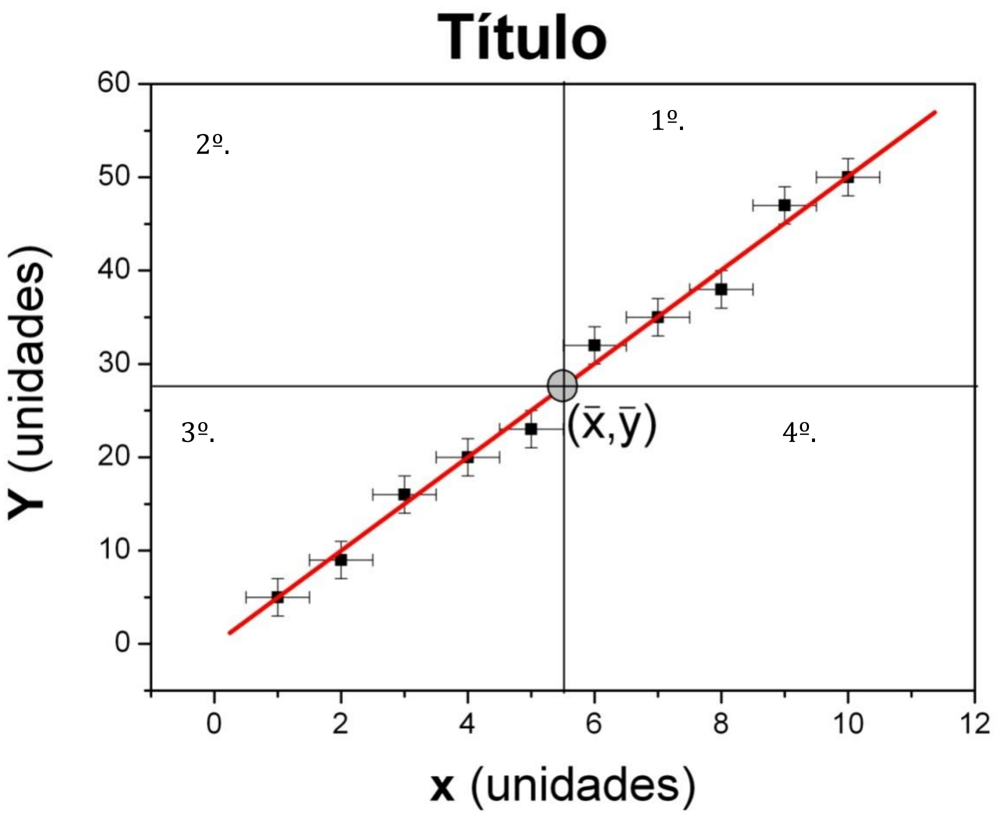


Figura 10 – Pontos experimentais e reta média.

Siga os passos abaixo.

1. Estime o centro de gravidade dos pontos $(\bar{x},\bar{y})$, onde $\bar{x}=(x_{\min}+x_{\max})/2$ e $\bar{y}=(y_{\min}+y_{\max})/2$. Os índices *min* e *max* referem-se aos valores mínimos e máximos de x e y medidos. As retas, vertical e horizontal, que passam por este ponto divide o gráfico em quatro quadrantes. No exemplo da figura 10, os dados estão metade no quadrante 1 e metade no quadrante 3.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

2. Coloque a ponta do lápis no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ e apoie a régua no lápis.

3. Gire a régua em torno do ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ até que 50% dos pontos **de cada quadrante** estejam por cima, e 50% abaixo da régua. (Note que mais de uma reta satisfazem esta condição e você deve escolher uma média.) Trace a **reta média**. A reta não necessariamente precisa passar por todos os pontos e nem pelos pontos iniciais e finais. A equação desta reta será:

$$y = mx + b. \tag{5.3}$$

8.4.1.1 Coeficiente Angular (m) e Linear (b) da Reta Média

Para avaliar o coeficiente angular da reta média escolha dois pontos sobre a reta, como sugerido na figura 11 (pontos P e Q).

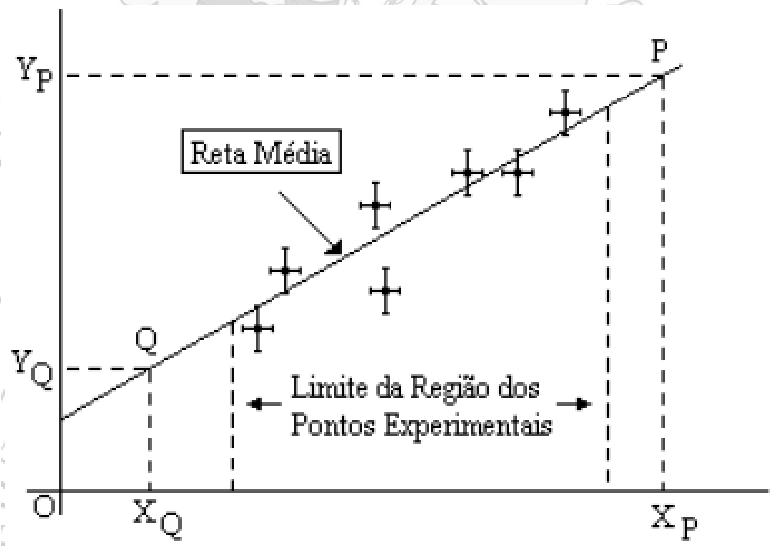


Figura 11 – Determinação do coeficiente angular da reta média.

Os pontos P e Q não são pontos experimentais e devem ser escolhidos em uma posição fora da região delimitada pelos dados experimentais. O coeficiente angular da reta será dado por:

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

$$m = \frac{Y_P - Y_Q}{X_P - X_Q} \tag{5.4}$$

O coeficiente linear (b), por sua vez, permanece, sendo, simplesmente, o ponto em que a reta toca o eixo y.

Incertezas dos coeficientes das retas médias

Para estimar a incerteza no coeficiente angular da reta média, considere as duas diagonais do quadrilátero ABCD como mostra a figura 12. Para obter os segmentos de reta AB e CD proceda da seguinte forma. Assinale em cada janela de incerteza, o vértice mais distante da reta média. Esse procedimento vai gerar um conjunto de pontos acima e abaixo da reta média. O conjunto de pontos que ficou acima permite traçar uma reta média auxiliar e determinar o segmento AB pela interseção desta reta com as verticais que passam por X_i e X_f. O segmento CD é obtido de forma análoga.

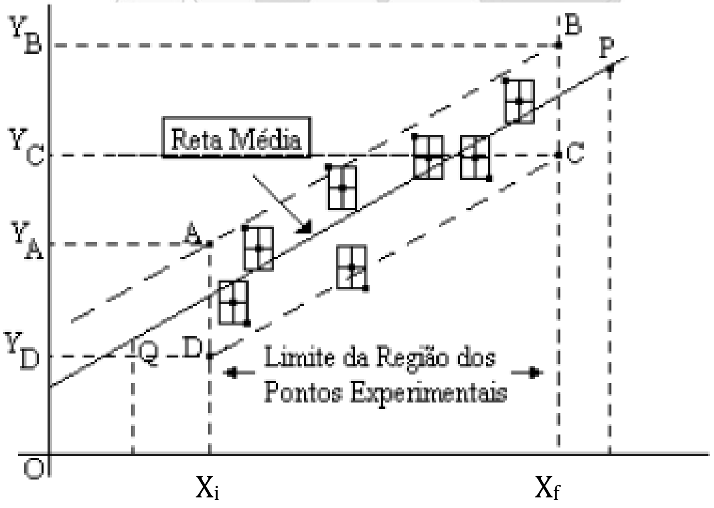


Figura 12 – Procedimento gráfico para obtenção dos coeficientes da reta média.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Então é possível calcular $S=\sum_{i=1}^{N}\Delta S_i=\sum_{i=1}^{N}(y-y_i)^2$, a partir das duas diagonais do quadrilátero ABCD:

$$\pm\Delta m=\pm\frac{(m_{max}-m_{min})}{2}\ e \qquad \pm\Delta b=\pm\frac{(b_{max}-b_{min})}{2} \tag{5.5}$$

onde $m_{max}=(Y_B - Y_D)/(X_f - X_i)$ e $m_{minx}=(Y_C - Y_A)/(X_f - X_i)$. b_{max} e b_{min} são as extrapolações das duas diagonais até o eixo y.

8.4.2 Método dos Mínimos Quadrados

O ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados é importante, pois ao contrário do método gráfico, é independente da avaliação do experimentador.

Este método consiste em minimizar o erro quadrático médio (S) das medidas. Considere então um conjunto de N medidas (x_i, y_i), com i assumindo valores inteiros desde 1 até N. S é definido como:

$$S=\sum_{i=1}^{N}\Delta S_i=\sum_{i=1}^{N}(y-y_i)^2\ , \tag{5.6}$$

onde y é o valor da curva ajustada (y=ax+b). O objetivo é somar os ΔS_i das N medidas e traçar uma reta que torne a soma dos ΔS_i mínima. Matematicamente isso corresponde a $\frac{\partial S}{\partial a}=0$ e $\frac{\partial S}{\partial b}=0$. É razoável acreditar que para que isso aconteça a reta desejada deve passar entre todos os pontos experimentais. Destas duas expressões extraímos os valores dos parâmetros a e b. O resultado é:

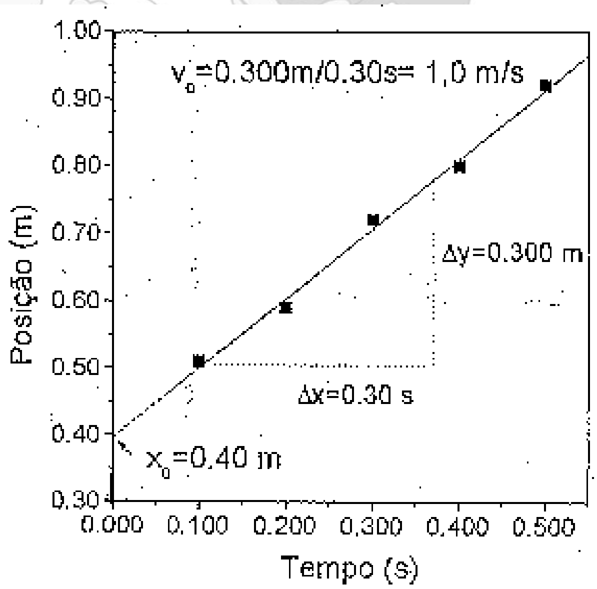
$$a=\frac{N\sum_{i=1}^{N}x_iy_i-\sum_{i=1}^{N}x_i\sum_{i=1}^{N}y_i}{N\sum_{i=1}^{N}x_i^2-(\sum_{i=1}^{N}x_i)^2} \quad \text{e} \quad b=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i^2\sum_{i=1}^{N}y_i-\sum_{i=1}^{N}x_iy_i\sum_{i=1}^{N}x_i}{N\sum_{i=1}^{N}x_i^2-(\sum_{i=1}^{N}x_i)^2}\ ,$$

Onde usou-se a notação de somatório: $\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_N$.

8.4.3 Exemplo de Determinação dos Coeficientes Angular e Linear

Considere uma medida de movimento retilíneo uniforme efetuado por um carrinho no laboratório. Foram medidos tanto sua posição x (em metros) quanto o tempo t (em segundos) e os resultados estão conforme a tabela abaixo. Construa o gráfico que representa o movimento e determine a velocidade e a posição inicial do carrinho usando o método dos mínimos quadrados e o método gráfico.

X tempo (s)	Y posição (m)
0.100	0.51
0.200	0.59
0.300	0.72
0.400	0.80
0.500	0.92



Para usarmos o método dos mínimos quadrados, sugere-se a construção de uma tabela, conforme indicado abaixo, lembrando qu aqui o eixo x corresponde ao tempo t e o eixo y, à posição x:

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

x(s)	y(m)	xy	x^2
0,100	0,51	0,051	0,0100
0,200	0,59	0,12	0,0400
0,300	0,72	0,22	0,0900
0,400	0,80	0,32	0,160
0,500	0,92	0,46	0,250
Σx = 1,500	Σy = 3,54	Σxy=1,17	Σx^2 = 0,550

Com esses resultados, basta substituir os valores nas fórmulas para a e b e lembrar que neste caso temos N = 5 medidas:

$$a=\frac{5x1,17-1,500x3,54}{5x0,550-(1,500)^2}=\frac{0,54}{0,50}=1,08\,m/s=1,1\,m/s$$
$$b=\frac{(0,550x3,54-1,17x1,500)}{5x0,550-(1,500)^2}=\frac{0,20}{0,50}=0,40\,m$$

Portanto, temos v_0=1,1m/s e x_0=0,40m.

Para construir a curva, basta atribuir pelo menos dois valores para t e encontrar os correspondentes x. Verifica-se que $\bar{x}$=0,30s e $\bar{y}$=0,71m. Com este centro de gravidade determina-se conforme a figura anterior os valores v_0=1,0m/s e x_0=0,40m. Observe a concordância dos dois métodos.

8.5 Exercícios

1) Considere a tabela abaixo. Ela apresenta as posições sucessivas de um certo objeto, em movimento retilíneo e uniforme.

Tempo(s) $\pm 0,0001$	0,1400	0,2000	0,3200	0,4400	0,5200	0,6400
Posição (mm) $\pm$ 1	879	895	919	949	964	970

Marque os pontos em papel milimetrada, trace a reta média e obtenha a velocidade do objeto. A seguir desenhe as barras de incerteza e obtenha $v \pm \Delta v$ pelo método gráfico.

Obs: As barras de erro ou incerteza indicam a faixa de valores prováveis para a grandeza medida.

2) Estudando o movimento de um carrinho, efetuado ao longo de um trilho de ar (movimento retilíneo uniforme) obteve-se os seguintes dados experimentais, após:

Posição (mm)	t_1 (s)	t_2 (s)	t_3 (s)	t_4 (s)	t_5 (s)
879	0,1400	0,1500	0,1400	0,1200	0,1200
895	0,2000	0,2200	0,2400	0,2500	0,2000
919	0,3200	0,3300	0,2900	0,3400	0,3300
949	0,4400	0,4500	0,4600	0,4600	0,4500
964	0,5200	0,5200	0,5100	0,5300	0,5900
970	0,6400	0,7200	0,7000	0,6900	0,6000

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Acima uma posição para o sensor de medida no trilho foi escolhida e então mediu-se o tempo gasto pelo carrinho para atingi-lo. Esta medida foi feita 5 vezes, correspondendo aos valores t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5. Em seguida repetiu-se o procedimento para outras 5 posições do sensor ao longo do trilho.

Determine utilizando o método dos mínimos quadrados a velocidade do carrinho e sua posição inicial com os erros associados.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

9 Roteiros – Primeira Sequência

9.1 Experimento 1: Estudo de Cinemática Utilizando Colchão de Ar

9.1.1 Objetivos

- ✓ Reconhecer o movimento retilíneo uniforme (MRU) e o uniformemente variado (MRUV);
- ✓ Obter a velocidade média de um corpo em movimento retilíneo de translação a partir do gráfico de distância percorrida (Δx) versus tempo gasto (Δt);
- ✓ Obter a aceleração média de um corpo em movimento retilíneo de translação a partir do gráfico da variação da velocidade (Δv) com o tempo gasto (Δt);
- ✓ Entender a diferença experimental entre medidas instantâneas e médias;
- ✓ Fornecer a equação relacionando distância com tempo para um móvel em MRU e um em MRUV.

9.1.2 Materiais Necessários

- ✓ 01 colchão de ar com articulador dianteiro e espera traseira para pequenas inclinações com elevação através de fuso milimétrico;
- ✓ 01 carro com imã e haste ativadora na cabeceira direita e mola com suporte M3 na cabeceira esquerda.
- ✓ 4 massas acopláveis de 0,5 N
- ✓ 01 computador para ser utilizado como cronômetro digital.
- ✓ 02 sensores fotoelétricos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

9.1.3 Montagem e Procedimento Experimental

Parte 1 – Movimento com Velocidade Constante.

1. Para os procedimentos experimentais de 2 a 15, observe a Figura 1.

2. Cuidado: Não arraste o carro sobre o trilho com o colchão de ar desligado.

3. Com o colchão de ar sem inclinação, colocar o imã na extremidade direita do carro e 04 pesos de 50 N sobre este, formando um X.

4. Coloque a extremidade esquerda do carro sobre a posição 250 mm da escala (800 mm na escala do outro lado). O primeiro sensor deve ser posicionado de forma a que a sombra da haste lateral do carro esteja sobre o buraco do mesmo, quando o carro se encontrar na posição descrita.

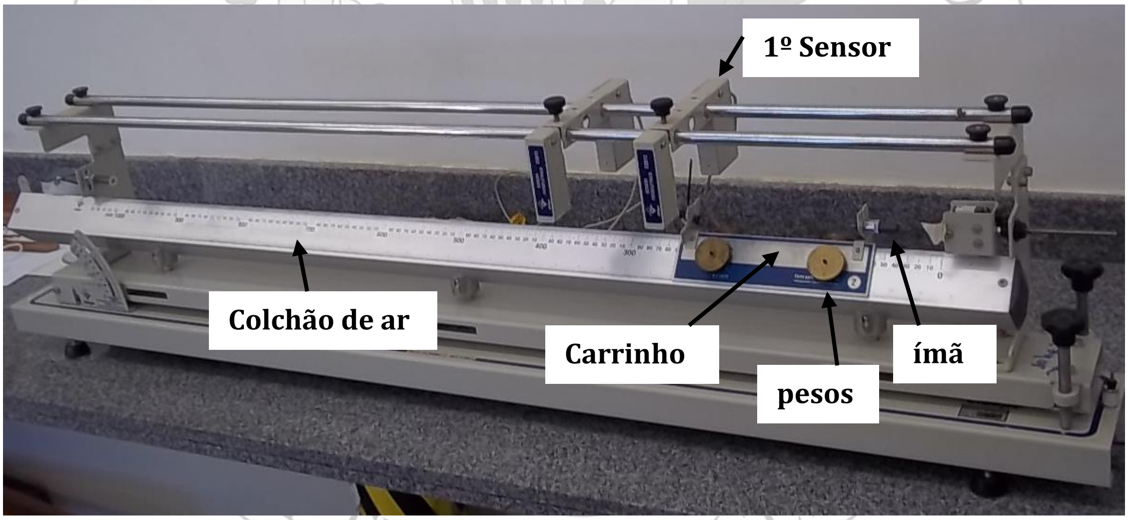


Figura 1 – Montagem experimental do colchão de ar

5. Coloque a extremidade esquerda do carro sobre a posição 300 mm da escala. Utilize a sombra da haste lateral do mesmo para posicionar o segundo sensor. Determine a incerteza na medida da posição por este método.

6. Anote a distância como sendo 50 mm +/- a incerteza determinada no procedimento 4.

7. Ligue o colchão de ar e verifique se o fluxo de ar é suficiente para eliminar o atrito entre o carrinho e o trilho, se não, regule com cuidado a bomba de ar.

8. Use o medidor de nível para verificar se o trilho está nivelado, se não, realize os ajustes necessários.

9. Posicione o carro de forma a que o imã em sua extremidade direita fique encostado exatamente no centro da bobina posicionada na extremidade direita do trilho. Quando solto nesta posição o carro não deve se mover.

10. Um dos integrantes do grupo deve posicionar-se junto ao computador e colocar o cronômetro do experimento para funcionar.

11. Dispare o carro da posição anterior usando o botão de acionamento da bobina. Verifique se o carro não está "pulando" ao ser lançado pela bobina, se o movimento não for horizontal desde o inicio chame o professor.

12. Anote o tempo que o carro levou para percorrer a distância entre os sensores.

13. Após o carro chegar ao outro lado do colchão, pare o movimento e retire o carro.

14. Repita os procedimentos 3 até 11, cinco vezes, anote os tempos obtidos, a diferença entre eles será utilizada para a determinação do erro nas medidas de tempo.

15. Mova o segundo sensor 50 mm na escala (para 350 mm). Repita os procedimentos 8 a 13 para esta nova distância, depois aumente a distância mais 50 mm ... repita até que a posição final do segundo cursor seja de 600 mm.

16. Anote os valores obtidos na Tabela 1.

Tabela 1 – Distâncias percorridas, tempos médios e desvios no movimento uniforme.

Distância (mm)	Tempo 1	Tempo 2	Tempo 3	Tempo 4	Tempo 5	Média	Desvio
50							
100							
150							
200							
250							
300							
350							

400							
450							
500							
550							
600							

17. Faça um gráfico de distância percorrida X tempo para este sistema.

Parte 2 – Movimento Uniformemente Acelerado.

1. Substitua o imã no carro por um pedaço de metal, de forma a que a bobina passe a atrair ao invés de repelir o carro.
2. Incline a rampa 10 +/- 0,5 graus.
3. Com o colchão de ar inclinado, colocar o imã na extremidade direita do carro e 04 pesos de 50 N sobre este, formando um X.
4. Coloque a extremidade esquerda do carro sobre a posição 250 mm da escala (800 mm na escala do outro lado). O primeiro sensor deve ser posicionado de forma a que a sombra da haste lateral do carro esteja sobre o buraco do mesmo, quando o carro se encontrar na posição descrita.

Não arraste o carro sobre o trilho com o colchão de ar desligado.

5. Coloque a extremidade esquerda do carro sobre a posição 300 mm da escala. Utilize a sombra da haste lateral do mesmo para posicionar o segundo sensor.
6. Anote a distância entre sensores.
7. Posicione o carro de forma a que o pedaço de metal em sua extremidade direita fique encostado exatamente no centro da bobina posicionada na extremidade direita do trilho. Um integrante do grupo deve manter o dedo no botão que liga a bobina de forma a que esta permaneça atraindo o metal até o momento de soltar o carrinho.
8. Um dos integrantes do grupo deve posicionar-se junto ao computador e colocar o cronômetro do experimento para funcionar.
9. Solte o carro da posição anterior usando o botão de acionamento da bobina.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

10. Anote o tempo que o carro levou para percorrer a distância entre os sensores.

11. Após o carro chegar ao outro lado do colchão, pare o movimento e retire o carro.

12. Repita os procedimentos 5 até 11, cinco vezes, anote os tempos obtidos, a diferença entre eles será utilizada para a determinação do erro nas medidas de tempo.

13. Mova o cursor e anote os tempos de forma a preencher a tabela abaixo:

Tabela 2 – Distâncias percorridas, tempos médios e desvio no movimento uniformemente acelerado.

Distância (mm)	Tempo 1	Tempo 2	Tempo 3	Tempo 4	Tempo 5	Média	Desvio
50							
75							
100							
150							
175							
200							
250							
275							
300							
350							
375							
400							
450							
475							
500							
550							
600							

UFES CEUNES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Obs: Note que a tabela possui alguns pontos a 25 +/- 1 mm um do outro, enquanto outros estão espaçados por 50 +/- 1 mm. Isto é feito de propósito para criar um desafio na hora de traçar o gráfico.

14. Calcule as velocidades instantâneas com respectivas incertezas, utilizando as equações abaixo e preencha a tabela abaixo.

$$v = v_0 + a\Delta t$$
$$x = x_0 + v_0\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2} \qquad (1)$$

Obs: Considere v_0 = 0 em x = 0 (na posição 250 mm do colchão de ar). Se fizermos esta consideração para v_0, o calculo da aceleração do carro será afetada por algum erro ? Justifique sua resposta no relatório.

Tabela 3 – Obtenção da velocidade no movimento Uniformemente Acelerado.

Distância Percorrida (considerando o referencial no primeiro sensor) (mm)	Intervalo de Tempo (com incerteza)	Velocidade instantânea no fim do percurso (com incerteza)
50		
75		
100		
150		
175		
200		
250		
275		
300		
350		
375		
400		
450		
475		
500		

550		
600		

15. Faça um gráfico de velocidade X tempo utilizando os dados da tabela acima, obtenha a aceleração a partir deste gráfico. A partir desta aceleração, obtenha (**g**) a aceleração da gravidade.

9.1.4 O que Incluir no Relatório do Experimento

- As equações algébricas para a posição do carrinho em função do tempo, considerando a aceleração constante, para o movimento com a rampa na horizontal e para o movimento com a rampa inclinada.
- Responda: É possível determinar se a aceleração foi mesmo constante nos dois casos? Demonstre que sim ou que não.
- Obs: Aceleração constante igual a zero ainda é aceleração constante.
- Gráfico de posição X tempo para o movimento uniforme.
- Para o movimento uniforme, faça o cálculo da velocidade a partir do gráfico e comparação com a velocidade obtida diretamente a partir dos valores da tabela (calculando linha por linha e obtendo a média). Qual dos dois valores é mais preciso? Por que?
- Gráfico de velocidade X tempo para o movimento uniformemente acelerado.
- Da aceleração calculada a partir do gráfico, obtenha a aceleração da gravidade e compare com o valor tabelado na literatura (cite o livro e destaque o valor apresentado).
- Equações dos movimentos, obtidas a partir dos gráficos.

UFES CEUNES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

9.2 Experimento 2: Sistema em Equilíbrio Estático

9.2.1 Objetivos

- ✓ Estudar um sistema de equilibrio estático;
- ✓ Utilizar as leis de Newton para verificar a condição de equilibrio estático.

9.2.2 Materiais Necessários

- ✓ 01 suporte
- ✓ 01 conjunto de corpos de prova
- ✓ 02 Conjuntos de roldanas
- ✓ 03 ganchos metálicos
- ✓ 01 Dinamômetro

9.2.3 Fundamentação Teórica

De acordo com a primeira Lei de Newton: *Se não há força resultante sobre um corpo, o mesmo permanece em repouso se ele estiver inicialmente em repouso, ou em movimento retilíneo com velocidade constante se ele estiver inicialmente em movimento.*

De acordo com a segunda Lei de Newton: *A força resultante* $\vec{F}_{res}$ *sobre um corpo de massa m (constante) está relacionada com a aceleração do corpo* $\vec{a}$ *por:*

$$\vec{F}_{res} = m.\vec{a}$$

a qual pode ser escrita em termos das suas componentes.

Portanto se um sistema encontra-se em equilíbrio estático, pode se dizer que a soma de todas as forças que atuam no corpo é zero, consequentemente o sistema descrito abaixo trata – se deste caso particular. Neste caso, tem-se no ponto P, a seguinte condição de equilíbrio $\overrightarrow{P_A} + \overrightarrow{P_B} + \overrightarrow{P_{AC}} = 0$.

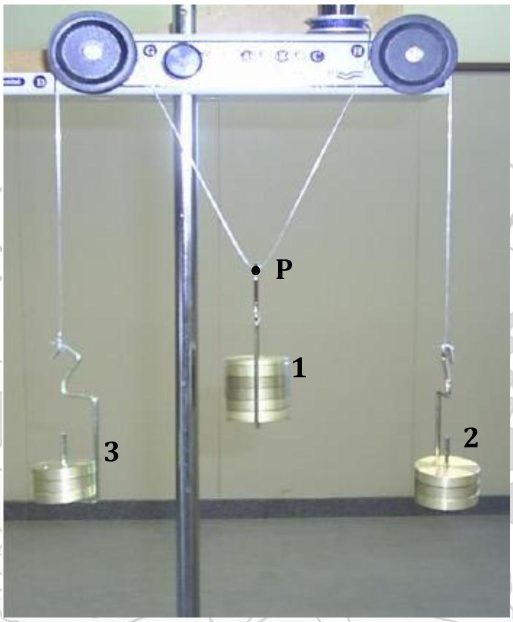


Figura 2 - Sistema em equilíbrio.

9.2.4 Procedimentos Experimentais

1. Utilize o dinamômetro e meça o peso de todos os corpos de prova.

2. Meça os ângulos mostrados na Figura 2.

3. Preencha o quadro 1.

4. Utilize as Leis de Newton e encontre a relação entre os pesos e os ângulos. Para calcular isto, escreva os vetores das Forças de Tração devidamente decompostas, e os pesos. Deve-se desprezar o atrito entre as polias e a corda.

UFES CEUNES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

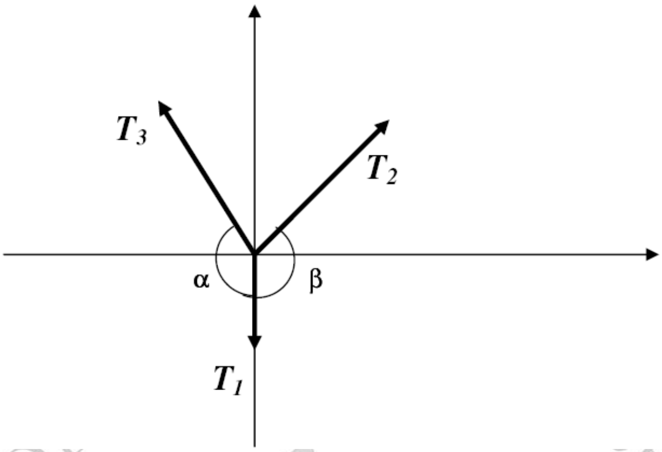


Figura 3 - Representação dos vetores relativos as forças de Tração.

Quadro 1. Dados experimentais

Medida	Peso 1 (N)	Peso 2 (N)	Peso (3)	α (graus)	β (graus)
01					
02					
03					
04					
05					
Média					

9.2.5 O que Incluir no Relatório do experimento

- Cálculo das médias e desvio padrão (adotando – o como incerteza experimental) de cada peso, bem como dos ângulos α e β;
- Valores dos senos e cossenos dos ângulos α e β, com suas respectivas incertezas;
- Mostrar que as componentes horizontal e vertical do vetor força resultante são nulas. Deve-se incluir os cálculos de incerteza, para fins comparativos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

9.3 Experimento 3: Lançamento Horizontal

9.3.1 Objetivos Gerais

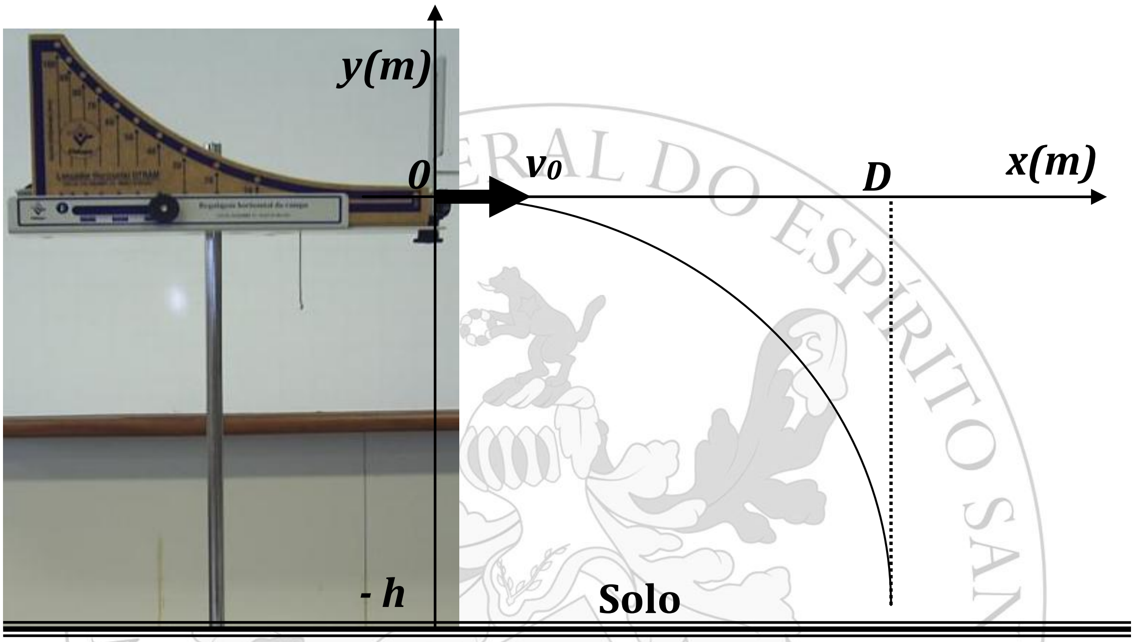
- ✓ Identificar corretamente a grandeza alcance em um lançamento horizontal de projétil a partir de uma rampa;
- ✓ Executar corretamente as medidas do alcance com o seu respectivo desvio;
- ✓ Relacionar a altura da posição de largada do móvel com o alcance;
- ✓ Determinar a velocidade total, no ponto de lançamento e no ponto de impacto com o solo;
- ✓ Utilizar o princípio de conservação de energia para determinar a velocidade de lançamento da esfera (ao abandonar a rampa);

9.3.2 Material Necessário

- ✓ Uma rampa principal, sustentação regulável para apoio da esfera alvo e suporte com esfera para os acessórios;
- ✓ Um conjunto de sustentação com escala linear milimetrada, haste e sapatas niveladoras e amortecedoras;
- ✓ Um fio de prumo com engate rápido;
- ✓ Uma esfera metálica para lançamento;
- ✓ Uma folha de papel carbono;
- ✓ Uma folha de papel de seda;
- ✓ Fita adesiva;
- ✓ Um lápis;
- ✓ Uma régua milimetrada;
- ✓ Um compasso;
- ✓ Um paquímetro;
- ✓ Uma folha de papel milimetrado.

9.3.3 Fundamentação teórica

Um corpo é solto, a partir do repouso do conjunto de sustentação e rampa, conforme é ilustrado na figura abaixo.



Ele passa pelo ponto (0,0) com velocidade inicial ***v(0)= v_0* m/s**, num tempo inicial ***0 s*.** Ele cai num movimento de queda livre de uma altura ***h* (m).** Tomamos o referencial no topo da altura, portanto sua posição inicial é zero. Medimos o tempo de queda ***t (s)*** até um atingir a distância d do eixo horizontal e o solo abaixo da linha de referencial. Usando a equação horária:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2,$$

Sabemos que $\vec{v}_0 = v_0\hat{i}$, $\vec{r}_0 = 0$, $\vec{r}(t_q) = D\hat{i} + h(-\hat{j})$, sendo t_q o tempo da queda. Substituindo a velocidade inicial, a posição inicial e a posição final, tiramos então o conjunto de equações:

UFES CEUNES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

$$t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad t_q = \frac{D}{v_0}.$$

Igualando os tempos acima, a velocidade inicial será,

$$v_0 = D\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Por outro lado, quando utilizamos a conservação da energia, é possível demonstrar que a velocidade na saída da rampa é:

$$v_0 = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

9.3.4 Montagem

- ✓ Nivele a base da rampa;
- ✓ Estique primeiramente a folha de papel carbono virada para cima sobre a mesa prendendo-a com fita adesiva, depois estique a folha de papel de seda e a prenda por cima do papel carbono;
- ✓ Utilizando o prumo, marque no papel a posição x_0 que fica verticalmente abaixo da saída da rampa.

9.3.5 Procedimento Experimental

1. Meça com uma régua milimetrada a altura do tripé (com incerteza), do tampo da mesa até a saída da rampa (h ± Δh).

h ± Δh =

2. Meça o peso da esfera (P ± ΔP) utilizando o dinamômetro. Com a ajuda de um paquímetro meça o valor do diâmetro da esfera e calcule o raio (r ± Δr), com

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

incerteza. Depois, você utilizará g = (9,80 ± 0,01) m/s^2, para calcular a massa da esfera (m ± Δm). Anote os valores na tabela 1.

Tabela 1 – Valores medidos de peso e raio para a esfera.

P ± ΔP	m ± Δm	r ± Δr

3. Solte a esfera metálica do ponto de desnível 20 mm existente na escala da rampa. Avalie a incerteza desta medida. Ela percorrerá a canaleta e fará um voo até colidir com o papel carbono. (O aluno deve estar atento para que a esfera "pique" somente uma vez sobre o papel).

4. Repita o processo acima em 10 lançamentos. Com um compasso desenhe um círculo reunindo em seu interior as marcas produzidas pelos lançamentos. A medida do raio deste círculo (R_C) fornece a "imprecisão máxima da medida do alcance" ou "desvio da medida do alcance" representando a medida da incerteza deste experimento. O valor médio do alcance é dado pela distância entre a marca x_0 (feita abaixo do prumo) e a marca x_c correspondente ao centro do círculo traçado.

5. Caso algum lançamento caia muito distante dos demais, despreze-o e refaça o lançamento.

6. Agora repita os procedimentos 2 – 4 com os desníveis (h) de 50, 80 e 100 mm avaliando as respectivas incertezas.

7. Tome o ponto médio das marcas feitas pela bola nos lançamentos com cada desnível **h** como sendo $\mathbf{x_c}$ para aquela altura h. Complete a tabela abaixo.

Tabela 2 – Lançamento feitos.

Marca na Escala da Rampa	Alcance Horizontal Médio ($\mathbf{X_c}$)	Incerteza em $\mathbf{X_c}$
20 mm		
50 mm		
80 mm		
100 mm		

9.3.6 O que Incluir no Relatório.

- O módulo do vetor velocidade na saída da rampa pode ser obtido com o uso das equações para conservação de energia e as equações das trajetórias. Calcule a velocidade por estes dois métodos para a esfera lançada nos quatro desníveis do procedimento experimental. Compare os resultados e monte uma tabela, com os cálculos obtidos.

- Para ficar mais claro: calcule a velocidade por dois métodos distintos e comparem os resultados.

9.4 Experimento 4: Equilíbrio entre Corpos num Plano Inclinado com Atrito

9.4.1 Objetivos

- ✓ Reconhecer os efeitos da força motora P_x e de sua equilibrante (tensão, compressão, atrito, etc).
- ✓ Reconhecer os efeitos da componente do peso P perpendicular a rampa P_y e sua equilibrante (força normal N).
- ✓ Determinar a dependência de P_x e P_y com o ângulo de inclinação da rampa.
- ✓ Determinar a dependência de P_x e P_y com a massa envolvida e a aceleração gravitacional no local.
- ✓ Determinar a vantagem mecânica V_m da máquina simples denominada plano inclinado.
- ✓ Saber interpretar o comportamento do atrito no sistema.
- ✓ Determinar o coeficiente de atrito estático de diversas superfícies.

9.4.2 Material Necessário

- ✓ 01 plano inclinado com ajuste angular regulável, escala de 0 a 45 graus, com divisão de um grau, indicador da inclinação; sistema de elevação contínuo por fuso milimétrico; sapatas niveladoras amortecedoras; rampa principal metálica com trilhos secundários paralelos tipo bordas finas, ranhura central, esperas laterais, escala na lateral do trilho secundário.
- ✓ 02 massas acopláveis de 50 g;
- ✓ 01 carrinho com conexão flexível para dinamômetro, conjunto móvel indicador da orientação da força peso com haste normal e espera de carga adicional;
- ✓ 01 dinamômetro de 2 N.
- ✓ Obs: Cuidado ao utilizar o dinamômetro para não ultrapassar a carga máxima que ele suporta.
- ✓ 01 corpo de prova de madeira com uma das faces revestida em material com alto coeficiente de atrito.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

9.4.3 Procedimento Experimental

1. Verifique o zero do dinamômetro, avalie a incerteza deste instrumento.
2. Pese o sistema carrinho + pesos (veja a Figura 1) com o uso do dinamômetro. Anote o valor obtido, bem como a incerteza.
3. Girando o manípulo do fuso de elevação contínua eleve o plano inclinado até um ângulo de 30 graus (Figura 1).

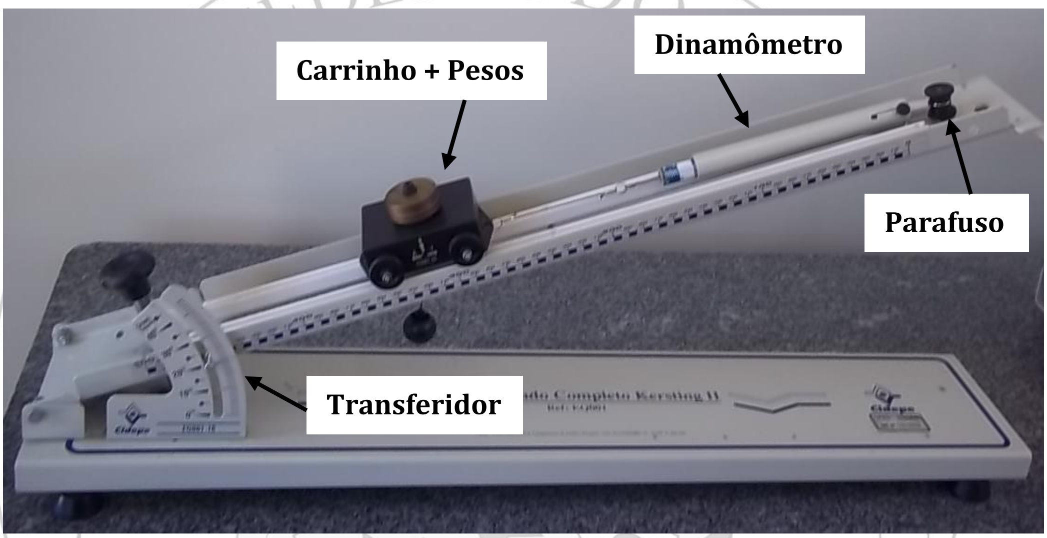


Figura 1- Montagem experimental para o carrinho + pesos no plano inclinado.

4. Prenda o dinamômetro no parafuso situado na parte superior da rampa do plano inclinado. Observe para que o dinamômetro fique paralelo ao plano inclinado.
5. Prenda o carrinho ao dinamômetro.
6. Realize quatro valores de força medida pelo dinamômetro. Obtenha a média e adote o desvio padrão como incerteza.
7. Faça o diagrama de forças que atuam neste momento sobre o móvel, identificando cada uma delas.
8. Diminua a inclinação do plano inclinado para 20 graus e meça a força no dinamômetro.
9. Obtenha e anote a relação entre a força mínima necessária para fazer o carro subir a rampa e o peso do carro, para os ângulos de 30 e 20 graus.

10. Retire o carro e o dinamômetro da rampa.
11. Use o dinamômetro para medir o peso do corpo de prova (Figura 2).
12. Coloque o plano em posição horizontal.

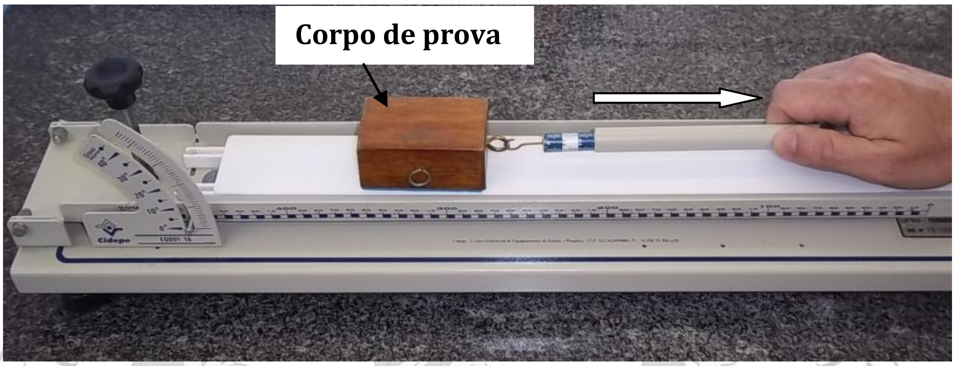


Figura 4 – Montagem experimental para o plano em posição horizontal.

13. Reajuste o zero do dinamômetro para que este trabalhe na posição horizontal.
14. Utilizando o dinamômetro, meça a força de atrito estático entre as superfícies do corpo de prova e a rampa do plano, agora na posição horizontal. Repita o procedimento de medida cinco vezes, obtenha a média e o desvio padrão.
15. Coloque a superfície esponjosa do corpo de prova para baixo e aumente o ângulo de inclinação da rampa, batendo levemente nela em cada grau, até que o corpo de prova comece a se mover lentamente.
16. Retire o corpo, reduza um pouco o ângulo, recoloque o corpo sobre a rampa e verifique se o corpo ainda se move. Caso não se mova aumente o ângulo até ele começar a se mover. Anote este ângulo.
17. Repita a determinação do ângulo em que o corpo está na iminência de movimento cinco vezes.
18. Repita os procedimentos 11- 18 com a superfície de madeira do corpo em contato com a rampa.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

19. Preencha os formulários abaixo:

Peso dos cilindros de 50g com incerteza	
Peso do carrinho com incerteza	
(Peso do carrinho + pesos) com incerteza	

Força medida pelo dinamômetro com o carrinho no plano inclinado.

Ângulo	Força Medida				Valor médio	Desvio
30 graus						
20 graus						

Peso do corpo de Prova = ______________________

Força de Atrito Estático no Plano horizontal

Superfície	Medida 1	Medida 2	Medida 3	Medida 4	Medida 5	Média	Desvio
Lisa							
Esponjosa							

Ângulo de Iminência do Movimento (obtido variando o ângulo até que o objeto esteja na iminência de movimento)

Valores medidos	Superfície Lisa (ângulo em graus)	Superfície Esponjosa (ângulo em graus)
Medida 1		
Medida 2		
Medida 3		
Medida 4		
Medida 5		
Média		
Desvio		

9.4.4 O que Incluir no Relatório do Experimento.

- Os diagramas de força **(com valores)** de todos os sistemas estudados.
- Verifique se a força medida no dinamômetro para o carrinho no plano inclinado confere com o previsto na teoria.
- A vantagem mecânica do plano inclinado (Peso/Força mínima para suspender a carga), para dois ângulos diferentes.
- Uma discussão sobre as vantagens e desvantagens do uso de planos inclinados com menor ângulo de inclinação.
- O cálculo dos coeficientes de atrito estático com incerteza das superfícies do corpo de prova em relação à rampa, utilizando o dinamômetro.
- O coeficiente de atrito estático é numericamente igual a tangente do ângulo de inclinação da rampa quando o corpo se encontra na iminência de movimento? Justifique sua resposta, e leve em consideração as incertezas.

10 Roteiros – Segunda Sequência

10.1 Experimento 5: Determinação da Aceleração da Gravidade Utilizando um Pêndulo Simples

10.1.1 Objetivos

- ✓ Determinar a aceleração da gravidade utilizando, para pequenas oscilações, um pêndulo simples.

- ✓ Determinar os desvios entre os valores teórico e experimental da aceleração da gravidade.

10.1.2 Materiais Necessários

- ✓ Sistema de sustentação principal Arete formado por tripé triangular com escala linear milimetrada
- ✓ 01 Pêndulo simples
- ✓ 01 Régua milimetrada
- ✓ 01 Cronômetro

10.1.3 Montagem e Procedimento Experimental

1. Monte um pêndulo simples prendendo uma massa na ponta da corda fornecida com o equipamento.

2. Estique a corda 30 cm a partir do topo do equipamento.

3. Aplique uma pequena força de forma a fazer o sistema massa + corda ter uma oscilação de, aproximadamente, cinco graus a partir do repouso.

   Obs: Ajuste o ângulo a partir da distância em relação a vertical que a massa deve ser movida para que a oscilação tenha este ângulo. Utilize o fato de que um ângulo de cinco graus corresponde a um comprimento de arco de cerca de 0,087 R onde R é o raio da circunferência e, neste caso, será o comprimento do fio.

Estime o valor da distância em relação a vertical (com incerteza) e escreva este valor no relatório.

4. Deixe o pendulo oscilar duas vezes, depois meça o tempo necessário para as próximas 10 oscilações e divida por 10 para obter o período médio de uma oscilação, repita esta medida cinco vezes. Quando possível, realize algumas destas medidas com pessoas diferentes medindo e marcando o tempo.

5. Desenrole mais a corda, de forma a deixar 30 cm a partir do topo e repita o procedimento acima, depois repita para 50, 60, 70, 80 e 90 cm.

6. Complete a tabela abaixo.

Tabela 1 – Valores obtidos para o período de 10 oscilações

Comprimento (cm)	Período X 10						
	Medida 1	Medida 2	Medida 3	Medida 4	Medida 5	Média	Desvio
30 +/-							
40 +/-							
50 +/-							
60 +/-							

UFES CEUNES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

10.1.4 O que incluir no relatório do Experimento

- Trace um gráfico de $\sqrt{L} \times T$ onde T é o período de oscilação do pêndulo e L o seu comprimento.

- Obtenha, a partir do coeficiente angular desta reta, o valor da aceleração da gravidade com sua respectiva incerteza. Compare com valores da literatura e analise as diferenças (se houverem).

10.2 Experimento 6: Deformações Elásticas

10.2.1 Objetivos Gerais

- ✓ Interpretar o gráfico força x elongação;
- ✓ Enunciar e verificar a validade da lei de Hooke;
- ✓ Verificar as equações para a constante de mola efetiva em um sistema com molas em série e outro com molas em paralelo.
- ✓ Calcular o trabalho realizado por uma força ao distender uma mola helicoidal;

10.2.2 Material Necessário

- ✓ Sistema de sustentação principal Arete formado por tripé triangular com escala linear milimetrada, escalar angular de 0 a 120 graus com divisão de um grau, haste principal e sapatas niveladoras amortecedoras: painel em aço com quatro graus de liberdade;
- ✓ Molas helicoidais;
- ✓ 01 conjunto de massas acopláveis;
- ✓ 01 gancho lastro;
- ✓ Uma escala milimetrada.

10.2.3 Montagem Inicial e Procedimentos Experimentais

Parte – Determinação das constantes elásticas de duas molas helicoidais separadamente.

1. Execute a montagem conforme Figura 1, prendendo a régua pelo orifício existente em sua extremidade e dependurando uma mola na posição B (indicada na peça). Leia o valor ocupado pela parte inferior do gancho lastro, na escala. Este valor será arbitrado como zero. O gancho funcionará como lastro, não o considere como carga.

2. Complete a tabela abaixo, para os valores de massa que você usará para a elongação das molas de constante elástica K1 e K2. Os valores de massa deverão ser em valores crescentes (M1 < M2 < M3 < M4 <M5).

Tabela 1 – Peso das diversas massas a utilizar no experimento.

Descrição do conjunto	**Peso (N)**	**ΔP(N)**
Gancho		
Gancho +[massa (M1)]		
Gancho + [massa (M2)]		
Gancho + [massa (M3)]		
Gancho + [massa (M4)]		
Gancho + [massa (M5)]		

Obs: Cuidado com o limite de peso suportado pelo dinamômetro !

3. Coloque o gancho lastro suspenso na mola, considerando a sua posição inicial de equilíbrio como zero. Assinale a posição arbitrada como zero na escala.

4. Acrescente as massas medidas e apresentadas na tabela anterior, uma de cada vez, completando as lacunas da tabela 1, para a mola de constante K1 e, da tabela 2, para a mola de constante K2.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

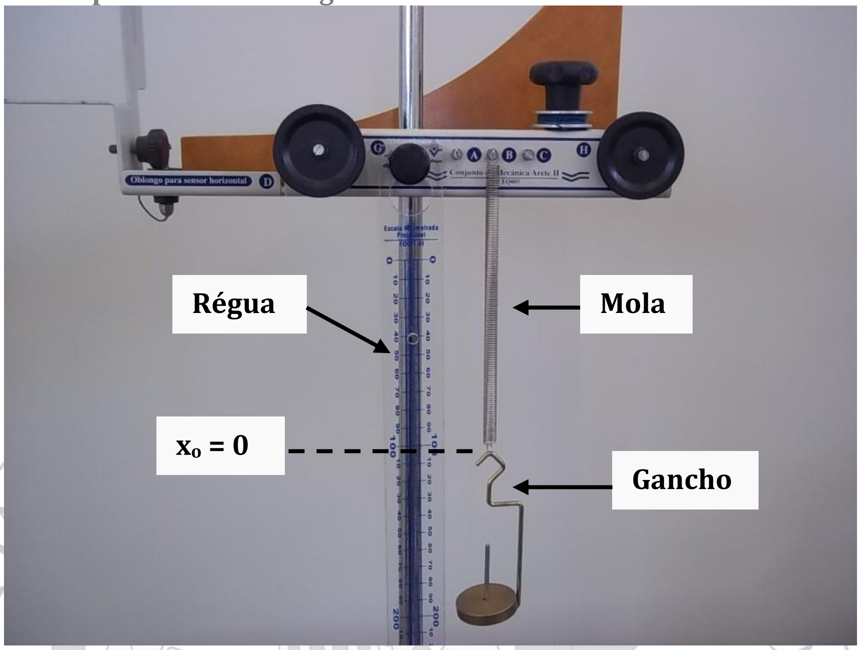


Figura 1 – Montagem experimental inicial para o estudo de deformações elásticas.

Tabela 2 – Elongação da mola helicoidal de constante elástica K1.

Descrição	Peso (N)	X (mm) elongação	Deformação δx (mm)	Incerteza na deformação (mm)
Gancho		X_0 =	Arbitrando Zero = 0	
M1		X_1 =	$X_1 - X_0$ =	
M2		X_2 =	$X_2 - X_0$ =	
M3		X_3 =	$X_3 - X_0$ =	
M4		X_4 =	$X_4 - X_0$ =	
M5		X_5 =	$X_5 - X_0$ =	

Tabela 3 – Elongação da mola helicoidal de constante elástica K2.

Descrição	Peso (N)	x (mm) elongação	Deformação δx (mm)	Incerteza na deformação (mm)
Gancho		X_0 =	Arbitrando Zero = 0	
M1		X_1 =	$X_1 - X_0$ =	
M2		X_2 =	$X_2 - X_0$ =	
M3		X_3 =	$X_3 - X_0$ =	
M4		X_4 =	$X_4 - X_0$ =	
M5		X_5 =	$X_5 - X_0$ =	

5. Trace o Gráfico do peso P em função de δx para cada uma das molas.

   Obs: (i) Faça as leituras na régua, olhando por baixo dos pesos.

   (ii) Avalie a incerteza da régua.

6. Utilizando dos valores da tabela 2 e 3 verifique a validade da relação F $\propto$ δx para cada medida executada. Obtenha os valores das constantes elásticas, K1 e K2, das molas helicoidal utilizando a média dos valores de F/x, chame este valor de kméd 1 e kméd 2.

7. Obtenha pelo cálculo do coeficiente angular de uma reta, o valor das constantes elásticas das molas helicoidal (Kgraf 1 e Kgraf 2).

8. A lei de Hooke é sempre válida?

9. A média das constantes de mola obtidas ao calcular F/x para cada valor de x e de F coincide com a constante de mola obtida pelo gráfico de F em função de x? Por quê?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Segunda Parte - constante elástica numa associação de molas helicoidais em série.

1. Complete a tabela abaixo.

   Obs: A escolha dos valores a utilizar para as massas é livre, mas cuidado com o limite de peso suportado pelo dinamômetro e pelas molas.

   (PROFESSOR: Por favor retire no mínimo cinco pontos da nota no relatório do grupo que danificar o dinamômetro ou régua e, informe o coordenador do laboratório do ocorrido).

   Tabela 4 – Elongação para duas molas helicoidais em série.

Descrição	Peso (N)	X (mm) elongação	Deformação δx (mm)	Incerteza na deformação (mm)
Gancho		X_0 =	Arbitrando Zero = 0	
M1		X_1 =	$X_1 - X_0$ =	
M2		X_2 =	$X_2 - X_0$ =	
M3		X_3 =	$X_3 - X_0$ =	
M4		X_4 =	$X_4 - X_0$ =	

2. Determine graficamente (kgraf3) e pela média de F/x (kméd3) a constante elástica para um sistema formado por duas molas em série (siga o procedimento desenvolvido anteriormente). Utilize as duas molas cuja constante de mola foi determinada na primeira parte deste experimento.
3. Compare os resultados obtidos graficamente com aqueles obtidos pela média.
4. Pesquise na literatura, descubra qual é a equação para a constante de elasticidade efetiva de duas molas em série em função das constantes de elasticidade das molas individualmente. Calcule a constante de elasticidade efetiva para o sistema de duas molas em série (kteor1) e compare o resultado com os valores de kméd3 e kgraf3.

UFES CEUNES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Terceira Parte: A constante elástica numa associação de molas helicoidais em paralelo

1. Realize a montagem experimental conforme a Figura 2:

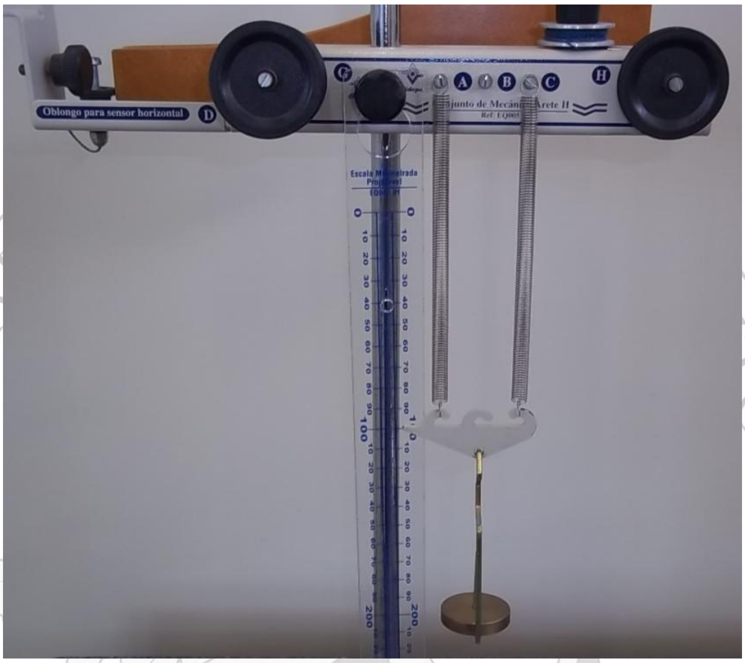


Figura 2 – Montagem experimental para a associação em paralelo de molas helicoidais.

2. Complete a tabela abaixo.

Tabela 5 – Elongação para duas molas helicoidais em paralelo**.**

Descrição	Peso (N)	X (mm) elongação	Deformação δx (mm)	Incerteza na deformação (mm)
Gancho		X_0 =	Arbitrando Zero = 0	
M1		X_1 =	$X_1 - X_0$ =	
M2		X_2 =	$X_2 - X_0$ =	
M3		X_3 =	$X_3 - X_0$ =	
M4		X_4 =	$X_4 - X_0$ =	

3. Determine graficamente (kgraf4) e pela média de F/x (kméd4) a constante de elástica para um sistema formado por duas molas em paralelo (siga o procedimento desenvolvido anteriormente). Utilize as duas molas cuja constante de mola foi determinada na primeira parte deste experimento.
4. Compare os resultados obtidos graficamente com aqueles obtidos pela média.
5. Pesquise na literatura, descubra qual é a equação para a constante de elasticidade efetiva de duas molas em série em função das constantes de elasticidade das molas individualmente. Calcule a constante de elasticidade efetiva para o sistema de duas molas em paralelo (kteor2) e compare o resultado com os valores de kméd4 e kgraf4.

Quarta Parte: Trabalho e energia mecânica numa mola helicoidal

1. Utilizando o gráfico de F em função da elongação, calcule o trabalho realizado pela força aplicada sobre a mola para alongá-la de sua posição de equilíbrio até a posição final x para uma mola, para duas molas em série e para duas molas em paralelo. Explique os resultados, comparando o trabalho realizado nos três casos.

10.2.4 O que Incluir no Relatório do Experimento

- Os gráficos pedidos acima.
- A Lei de Hooke é sempre válida?
- Comparações entre os valores das constantes de mola obtidos via gráfico, via média e via cálculo. Qual destes é mais preciso?

10.3 Experimento 7: Conservação da Quantidade de Movimento

10.3.1 Objetivos Gerais

- ✓ Verificar a lei da conservação do momento linear em colisões frontais e laterais.

10.3.2 Materiais Necessários

- ✓ Uma rampa principal, sustentação regulável para apoio da esfera alvo e suporte com esfera para os acessórios;
- ✓ Um conjunto de sustentação com escala linear milimetrada, haste e sapatas niveladoras e amortecedoras;
- ✓ Um fio de prumo com engate rápido;
- ✓ Uma esfera metálica maior para lançamento;
- ✓ Uma esfera metálica menor para lançamento;
- ✓ Uma folha de papel carbono;
- ✓ Uma folha de papel de seda;
- ✓ Fita adesiva;
- ✓ Um lápis;
- ✓ Uma régua milimetrada;
- ✓ Um compasso;
- ✓ Um paquímetro.

10.3.3 Montagem

- ✓ Nivele a base da rampa;
- ✓ Estique primeiramente a folha de papel carbono virada para cima sobre a mesa prendendo-a com fita adesiva, depois estique a folha de papel de seda e a prenda por cima do papel carbono;
- ✓ Utilizando o prumo, marque no papel a posição x_0 que fica verticalmente abaixo da saída da rampa.

UFES CEUNES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

10.3.4 Procedimento Experimental

Parte 1 - Determinação da Velocidade da Esfera maior para o desnível de 100 mm

1. Meça com uma régua milimetrada a altura do tripé (com incerteza), do tampo da mesa até a saída da rampa (h ± Δh).

h ± Δh =

2. Meça o peso da esfera maior (P_G) utilizando o dinamômetro. Meça o peso da esfera menor (P_P). Com a ajuda de um paquímetro meça o diâmetro da esfera maior e da esfera menor e calcule o raio das respectivas esferas (r_G e r_P). Depois, você utilizará g = (9,80 ± 0,01) m/s^2, para calcular a massa da esfera (m ± Δm). Anote os valores na Tabela 1.

Tabela 1 – valores medidos de peso e raio para as eferas maior e menor.

$m_G \pm \Delta m_G$	$m_P \pm \Delta m_P$	$r_G \pm \Delta r_G$	$r_P \pm \Delta r_P$

3. Solte a esfera metálica maior do ponto de desnível 100 mm existente na escala da rampa. Avalie a incerteza desta medida. Ela percorrerá a canaleta e fará um voo até colidir com o papel carbono. (O aluno deve estar atento para que a esfera "pique" somente uma vez sobre o papel).

4. Repita o processo acima em 10 lançamentos. Com um compasso desenhe um círculo reunindo em seu interior as marcas produzidas pelos lançamentos. A medida do raio deste círculo (**R_c**) fornece a "imprecisão máxima da medida do alcance" ou "desvio da medida do alcance" representando a medida da incerteza deste experimento. O valor médio do alcance é dado pela distância entre a marca **x_0** (feita abaixo do prumo) e a marca **x_c** correspondente ao centro do círculo traçado.

5. Caso algum lançamento caia muito distante dos demais, despreze-o e refaça o lançamento. Anote na próxima página, o valor de **x_c** com sua incerteza.

UFES CEUNES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Tabela 1 – Lançamento feitos.

Marca na Escala da Rampa	Alcance Horizontal Médio ($\mathbf{X_c}$)	Incerteza em $\mathbf{X_c}$
100 mm		

Parte 2 - Determinação da quantidade de movimento numa colisão frontal (com base na conservação da quantidade de movimento horizontal de duas esferas diferentes).

1. Coloque a esfera menor sobre o suporte da esfera alvo e regule o sistema para a esfera metálica maior se choque frontalmente com ela ao abandonar a rampa de acordo com a Figura 1.

2. Solte a esfera metálica maior do ponto de desnível 100 mm existente na escala da rampa. Ela percorrerá a canaleta e fará um voo até colidir, primeiro com a esfera menor e depois com o papel carbono. (O aluno deve estar atento para que a esfera "pique" somente uma vez sobre o papel).

3. Assinale com 1p e 1g os pontos de impacto das esferas menor e maior, respectivamente.

4. Refaça mais cinco choques, assinalando os pontos 2p, 3p, 4p e 2g, 3g e 4g e trace os círculos de imprecisão marcando seus centros como $\mathbf{c_P}$ e $\mathbf{c_G}$.

5. Localize e identifique como $\mathbf{x_G}$ e $\mathbf{x_P}$ os vetores deslocamentos horizontais de cada esfera. Determine no relatório as velocidades $\mathbf{v_{xG}}$ e $\mathbf{v_{xP}}$.

Tabela 2 – Valores medidos de alcance horizontal para as esferas maior e menor.

$X_G \pm \Delta X_G =$	
$X_P \pm \Delta X_P =$	

UFES CEUNES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

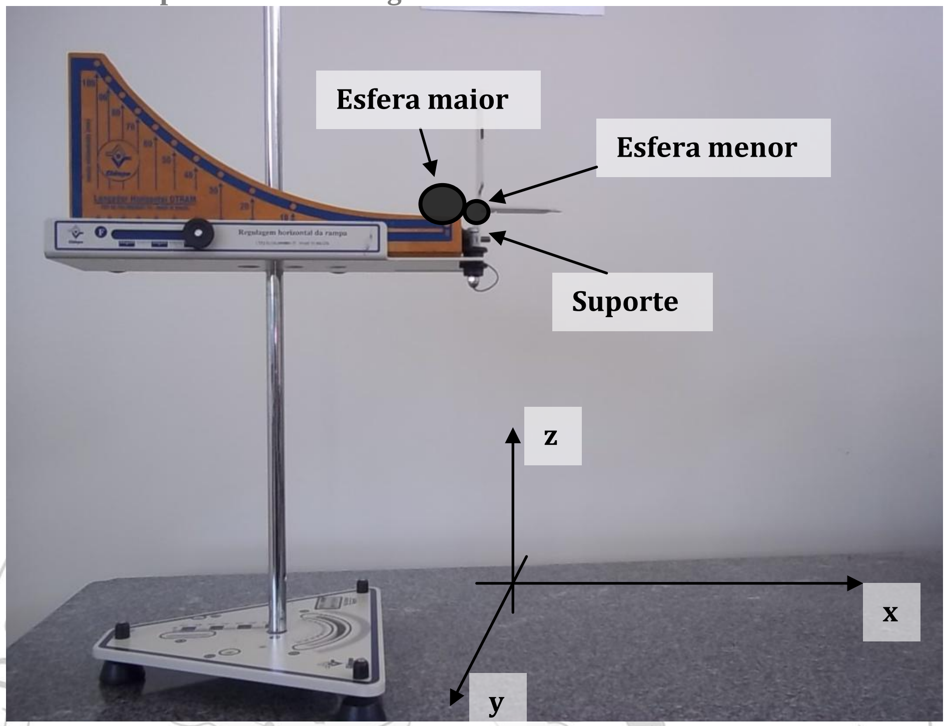


Figura 1 – Montagem experimental para o lançamento horizontal.

Obs 1: A distância entre a saída da rampa e o parafuso de apoio da esfera alvo (Δx) deve ser escolhida de forma a minimizar o atrito com a rampa de apoio e reduzir a transferência de momento ao suporte da esfera alvo.
Obs 2: Ao ocorrer o choque, a esfera incidente deve tocar a esfera alvo na sua secção reta equatorial.

Parte 3 - Conservação da quantidade do movimento numa colisão lateral de duas esferas diferentes (com base na conservação da quantidade de movimento horizontal).

1. Coloque a esfera metálica menor sobre o suporte da esfera alvo e regule o sistema para que a esfera metálica maior se choque na lateral da esfera menor ao abandonar a rampa. Obs: Ao ocorrer o choque, a esfera incidente deve encontrar ± 1/3 da região equatorial da esfera alvo em sua frente.

2. Repita os itens 2 – 5 da parte 2 deste experimento.

3. Desenhe sobre o papel, uma linha média que passa sobre o ponto onde as esferas colidiram. Esta servirá como referência para calcular a distância

lateral (eixo Y). Determine com isto, os valores de Com isto, você poderá calcular a componente Y da velocidade da esfera maior ($\mathbf{v_{yG}}$), com incerteza.

4. Meça a distância entre esta linha até o ponto central que a esfera menor caiu ($\mathbf{y_P}$). Calcule a componente Y da velocidade da esfera menor ($\mathbf{v_{yP}}$), com incerteza.

5. Meça a distância entre esta linha até o ponto central que a esfera maior caiu ($\mathbf{y_G}$). Calcule a componente Y da velocidade da esfera maior ($\mathbf{v_{yG}}$), com incerteza.

6. Complete a Tabela 3.

Tabela 3 – valores medidos de alcance nas direções x e y das esferas maior e menor, durante a colisão lateral.

Esfera Maior	$X_G \pm \Delta X_G =$	
	$Y_G \pm \Delta Y_G =$	
Esfera Menor	$X_P \pm \Delta X_P =$	
	$Y_P \pm \Delta Y_P =$	

10.3.5 O que Incluir no Relatório do Experimento

- O módulo do vetor velocidade **na saída da rampa** pode ser obtido com o uso das equações das trajetórias. Calcule a velocidade por este método para a esfera lançada no desnível de 100 mm. Calcule a incerteza na velocidade. Esta será a velocidade da esfera maior antes da colisão.

1. <u>Para o impacto frontal</u>:

- calcular o módulo do vetor quantidade de movimento horizontal da esfera maior, com incerteza, quando esta deixa a rampa antes de colidir com a esfera pequena ?

- É possível provar que houve conservação da quantidade de movimento? Mostre que sim ou não, calculando a quantidade de movimento total após a colisão, levando em consideração as incertezas.

UFES CEUNES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

2. Para o impacto lateral:

- É possível provar que houve conservação da quantidade de movimento nas duas direções ? Mostre que sim ou não, calculando a quantidade de movimento, antes e após a colisão, nas direções x e y, levando em consideração as incertezas.

Obs: Na direção y, o valor final da quantidade de movimento deverá ser nula. Explique.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

10.4 Experimento 8: Segunda Lei de Newton

10.4.1 Objetivo

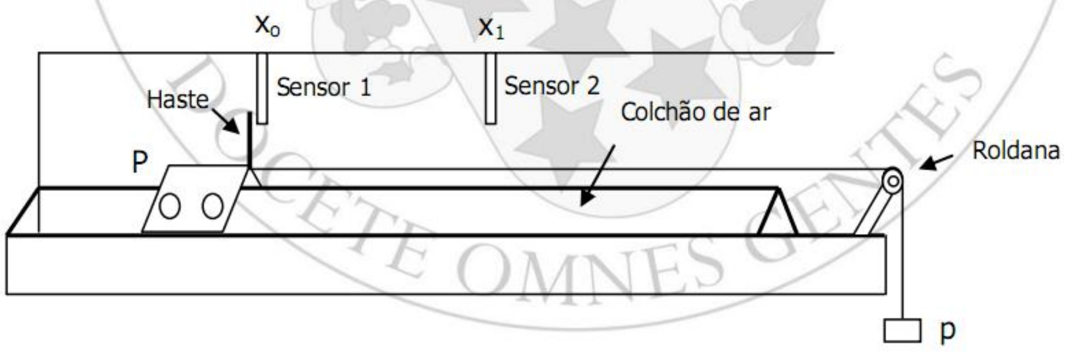
- ✓ Verificar que a aceleração adquirida por um corpo sob a ação de uma força constante é inversamente proporcional à massa, ou ao peso do corpo.

10.4.2 Materiais Necessários

- ✓ 01 colchão de ar com articulador dianteiro;
- ✓ 01 carro com imã e haste ativadora na cabeceira direita e mola com suporte na cabeceira esquerda;
- ✓ 08 massas acopláveis;
- ✓ 01 computador para ser utilizado como cronômetro digital;
- ✓ 02 sensores fotoelétricos;
- ✓ Polia;
- ✓ Fio com gancho e massa acoplada.

10.4.3 Montagem e Referencial Teórico

Considere dois objetos de pesos P e p, como na Figura 1:



Eles estão ligados entre si por meio de um fio muito leve e inextensível. Com esta montagem, as acelerações de P e p terão o mesmo módulo. Na ausência de atrito entre as superfícies, o módulo da aceleração (a) de cada um dos objetos deverá ser:

$$a = \left(\frac{p}{P + p}\right) g \qquad (1)$$

Sendo g o módulo da aceleração da gravidade. Vamos adotar g = (9,80 ± 0,01) m/s^2.

Esta equação é obtida a partir da segunda lei de Newton, aplicada em cada um dos objetos de pesos P e p.

Neste experimento, usaremos um "colchão de ar". Este consiste de um trilho com orifícios laterais por onde o ar, proveniente de um compressor, escapa. O colchão de ar que se forma impede o contato entre as superfícies, eliminando o atrito.

Usaremos dois objetos de pesos P_1 e P_2, diferentes, puxados um de cada vez por um objeto de peso muito pequeno (p), se comparado com P_1 e P_2.

10.4.4 Procedimentos Experimentais

1. Escolha 04 pesos de massas iguais e acople ao carrinho. Pese o conjunto carro+pesos (chame de P_1) e anote seu valor na Tabela 1. Com o colchão de ar sem inclinação e desligado, coloque P_1 sobre este.

Obs: Não arraste o carro sobre o trilho com o colchão de ar desligado.

2. Pese o pequeno cilindro+gancho (chame de peso p) que será acoplado a P1 por meio de um fio, que passa por uma roldana. Veja Figura 1. Anote o valor de p na Tabela 1. Se preferir, pode usar somente o gancho.

3. Coloque a extremidade esquerda de P_1 sobre a posição 250 mm da escala (800 mm na escala do outro lado). O primeiro sensor deve ser posicionado de forma que a sombra da haste lateral do carro esteja sobre o buraco do mesmo, quando o carro se encontrar na posição descrita.

4. Coloque a extremidade esquerda do carro sobre a posição 300 mm da escala. Utilize a sombra da haste lateral do mesmo para posicionar o segundo sensor. Determine a incerteza na medida da posição por este método.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

5. Anote a distância como sendo 50 mm ± a incerteza, determinada no procedimento 4.

6. Ligue o colchão de ar e verifique se o fluxo de ar é suficiente para eliminar o atrito entre o carrinho e o trilho, se não, regule com cuidado a bomba de ar.

7. Use o medidor de nível para verificar se o trilho está nivelado, se não, realize os ajustes necessários.

8. Posicione P_1 de forma que a haste fique o mais próximo possível do primeiro sensor. O carrinho quando solto nesta posição não deve se mover.

9. Monte o sistema, de acordo com a Figura 1. Ao fazer isto, mantenha este sistema em repouso (segure P_1). Não se esqueça de manter a haste de P_1 o mais próximo possível do primeiro sensor (isto garante que a velocidade inicial é da ordem de zero).

10. Um dos integrantes do grupo deve posicionar-se junto ao computador e colocar o cronômetro do experimento para funcionar.

11. Solte o carro da posição anterior. Se houver algum problema, chame o professor (ou monitor).

12. Anote, na Tabela 1, o tempo que o carro levou para percorrer a distância entre os sensores.

13. Repita os procedimentos 8 até 12, quatro vezes, anote na Tabela 1 os tempos (t) obtidos, a diferença entre eles será utilizada para a determinação do erro nas medidas de tempo.

14. Mova o segundo sensor 50 mm na escala (para 350 mm). Repita os procedimentos 8 a 13 para esta nova distância, depois aumente a distância mais 50 mm ... repita até que a posição final do segundo cursor seja de 600 mm. Anote os resultados na Tabela 1.

15. Troque os pesos que estão sobre carro, por outros. Chame o novo conjunto carro+pesos de P_2. Repita os procedimentos de 8 a 14, para este novo sistema. Anote os dados na Tabela 2.

UFES CEUNES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

Tabela 1 – Valores experimentais de pesos, distâncias percorridas, velocidades instantâneas e intervalos de tempo, necessários para o cálculo da aceleração do carro+pesos (P_1).

P_1 =				p=			
Distância (mm)	t_1	t_2	t_3	t_4	$t_m \pm \Delta t_m$	Velocidades instantâneas no fim do percursso com incerteza	
50							
100							
150							
200							
250							
300							
350							
400							
450							
500							
550							
600							

OBS: As velocidades instantâneas com respectivas incertezas, no final de cada percurso, podem ser obtidas utilizando as equações abaixo.

$$v = v_0 + a\Delta t$$

$$x = x_0 + v_0\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2}$$

Obs: Considere $v_0 = 0$ em $x = 0$ (na posição 250 mm do colchão de ar).

Tabela 2 – Valores experimentais de pesos, distâncias percorridas, velocidades instantâneas e intervalos de tempo, necessários para o cálculo da aceleração do carro+pesos (P_2).

P_2 =				p=			
Distância (mm)	t_1	t_2	t_3	t_4	$t_m \pm \Delta t_m$	Velocidades instantâneas no fim do percursso com incerteza	
50							
100							
150							
200							
250							
300							
350							
400							
450							
500							
550							
600							

10.4.5 O que Incluir no Relatório do Experimento

- Faça gráficos de velocidade instantânea em função do tempo médio, para cada carro+pesos (P1 e P2), obtendo as respectivas acelerações (a_1 e a_2) e suas incertezas através dos respectivos coeficientes angulares das retas e suas incertezas.

- Calcule e compare $(P_1 + p)xa_1$ com $(P_2 + p)xa_2$ levando em consideração, as incertezas.

- Calcule e compare $(P_1 + p)/(P_2 + p)$ com a_2/a_1 levando em consideração as incertezas.

- Calcule pxg (com incerteza) e compare com os resultados acima.

- Os resultados destas comparações é o esperado ? Justifique. Caso não obtenha os resultados previstos, comente as possíveis causas.

- Deduza a equação (1), representando todas as forças numa figura e aplicando as leis de Newton a cada um dos corpos isoladamente.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
Departamento de Engenharia e Ciências Exatas

11 Apêndices

11.1 Apêndice I: Dedução das Equações dos Mínimos Quadrados

Em uma experiência na qual se efetuaram N medidas, tem-se um conjunto de N pares ordenados (x,y), os quais, quando representados graficamente, podem fornecer uma reta. Nosso objetivo é ajustar os dados com a equação:

$$y = ax + b \quad ,$$

onde os coeficientes a e b devem ser tais que minimizem a diferença entre os valores medidos y_i e os correspondentes valores calculados $y(x_i) = ax_i + b$ dados pela equação acima. É necessário estabelecer um critério para minimizar as diferenças e otimizar o cálculo dos coeficientes. Os desvios Δy_i entre cada valor medido e o valor calculado correspondente são: $\Delta y_i = y_i - y(x_i)$. No entanto, a soma destes desvios não fornece uma boa indicação do quanto os dados se aproximam dos valores calculados a partir da equação da reta, uma vez que grandes desvios positivos podem ser contrabalançados por grandes desvios negativos. Daí a definição do erro quadrático médio $S = \sum_{i=1}^{N} (\Delta y_i)^2$. Portanto, devemos encontrar a reta tal que

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \text{ e } \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad .$$

Calculando esses termos temos:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2 \right) = -2\sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)x_i = 0\,;$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{N}(y_i-ax_i-b)^2\right)=-2\sum_{i=1}^{N}(y_i-ax_i-b)=0\,.$$

As duas equações acima podem ser escritas:

$$-\sum_{i=1}^{N}y_ix_i+a\sum_{i=1}^{N}x_i^2+b\sum_{i=1}^{N}x_i=0\,,$$

$$-\sum_{i=1}^{N}y_i+a\sum_{i=1}^{N}x_i+b=0\,.$$

Resolvendo o sistema de equações acima para a e b obtemos finalmente:

$$a=\frac{N\sum_{i=1}^{N}x_iy_i-\sum_{i=1}^{N}x_i\sum_{i=1}^{N}y_i}{N\sum_{i=1}^{N}x_i^2-(\sum_{i=1}^{N}x_i)^2}\quad \text{e} \quad b=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i^2\sum_{i=1}^{N}y_i-\sum_{i=1}^{N}x_iy_i\sum_{i=1}^{N}x_i}{N\sum_{i=1}^{N}x_i^2-(\sum_{i=1}^{N}x_i)^2}\,.$$

12 Bibliografia

SANTORO, A. *et al. Estimativas e Erros em Experimentos da Física*. Rio de Janeiro: Editora da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2005.

Apostila de Física Experimental do Curso de Física - DFIS/UFES

Cadernos de roteiros CIDEPE